|  |
| --- |
|  |
| МИНОБРНАУКИ РОССИИ |
| Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  высшего образования  **«МИРЭА – Российский технологический университет»**  **РТУ МИРЭА**  **Филиал РТУ МИРЭА в г. Ставрополе** |

**Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе** **по дисциплине** «**Математический анализ**»

**для студентов направления подготовки:**

**08.03.01 Строительство**

Часть 2

**Ставрополь**

Методические указания, составлены в соответствии Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования и программой дисциплины «Математический анализ» для студентов по направлению подготовки 08.03.01 Строительство.

Составитель: Чекалова Л.А., к.п.н., доцент

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| ***Практическое занятие 8.*** *Вычисление неопределенного интеграла* | 4 |
| ***Практическое занятие 9.*** *Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей* | 11 |
| ***Практическое занятие 10.*** *Определенный интеграл. Вычисление площадей плоских фигур* | 20 |
| ***Практическое занятие 11.*** *Несобственные интегралы* | 29 |
| ***Практическое занятие 12.*** *Числовые и степенные ряды* | 35 |
| ***Практическое занятие 13.*** *Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка* | 56 |
| ***Практическое занятие 14.*** *Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Уравнение Лагранжа и Клеро* | 62 |
| ***Практическое занятие 15.*** *Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами* | 70 |
| ***Практическое занятие 16.*** *Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений* | 74 |
| **Рекомендуемая литература** | 84 |

## **Практическое занятие 8**

## **Вычисление неопределенного интеграла**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Функция  называется *первообразной* дляфункции  на интервале , если в каждой точке этого интервала справедливо равенство

*.*

*Теорема*. Если функция  является первообразной функции  на , то множество всех первообразных для  задается формулой , где С – постоянное число.

Множество всех первообразных функций для функции  называется *неопределенным интегралом от* функции  и обозначается символом: .

Тогда по определению .

 - подынтегральная функция,

 - подынтегральное выражение,

*х* – переменная интегрирования,

- знак неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

*Свойства неопределенного интеграла:*

1°. Производная неопределенного интеграла (т.е. каждой его составляющей первообразной функции) равна подынтегральной функции: .

2°. Дифференциал от неопределенного интеграла (т.е. каждой его составляющей первообразной функции) равен подынтегральному выражению .

3°. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: .

4°. Постоянный множитель можно выносить из-под знака неопределенного интеграла: , .

5°. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых: .

6°.Если , то .

*Таблица неопределенных интегралов*

1. .
2. .

В частности, , , .

1. .
2. . В частности, .
3. .
4. .
5. 
6. 
7. .
8. .
9. 
10. 
11. .

В частности, .

1. .
2. . В частности, .
3. .
4. .
5. ..

Интегралы, получающиеся из табличных линейным сдвигом аргумента (т.е. интегралы вида ,  и т.д.) будем называть *почти табличными интегралами*.

*Основные методы интегрирования:*

*Метод непосредственного интегрирования.* Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении данного интеграла к табличному, часто используются следующие преобразования дифференциала (*операция подведение под знак дифференциала*).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*Интегрирование заменой переменной (подстановкой).* Пусть  - функция, непрерывно дифференцируемая на некотором промежутке, тогда в данном неопределенном интеграле всегда можно перейти к новой переменной *t* по формуле **.

При замене  должно осуществляться взаимно однозначное соответствие между областями  и  определения функций  и , такое, чтобы функция  принимала все значения  (оно обозначается ).

В общем случае справедливы следующие формулы:

1) , где  и  некоторые числа, ;

2) ;

3) ;

4) .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Вычислить интегралы:

а) , б) , в) .

*Решение*:

а) ,

б) ,

в) 

.

***Задача 2***. Используя таблицу, найти следующие интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

*Решение*:

а) 

б) 

в) 

г) Считая , получим: 

5) Считая , имеем: 

***Задача 3***. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интеграл:

1) 2)

*Решение*:

1) 



2) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель:



Отсюда



.

***Задача 4***. Найти «почти табличный» интеграл ****

*Решение*:

Поскольку  то данный интеграл отличается от табличного  заменой *х* на 3*х*.

Поэтому, всоответствии со свойством 5 интеграла имеем:



***Задача 5***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 6***. Найти .

*Решение*:



.

***Задача 7***. Найти используя подходящую подстановку:

1)  2)  3)

*Решение*:

1) 

Возвращаясь к переменной *x*, получим окончательно:



2) 



3) 



Последний из разобранных интегралов является частным случаем интегралов вида  (в подынтегральной дроби здесь стоит производная знаменателя), решаемых с помощью замены *.* Поэтому :

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 3.1***. Найти интегралы, используя таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 3.2***. Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 3.3***. Найти «почти табличные» интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 3.4***.Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Привести свойства неопределенного интеграла.
3. Назовите методы вычисления интегралов.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 3.1***. Найти интегралы, используя таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 3.2***. Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 3.3***. Найти «почти табличные» интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 3.4***.Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Практическое занятие 9**

**Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Интегрирование по частям.*Если  и  дифференцируемые функции. По свойству дифференциала  или . Интегрируя левую и правую части последнего равенства и учитывая

, ,

получаем .

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.*

Применять её целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. В некоторых случаях эту формулу (необходимо променять несколько раз.

Интегрирование рациональных дробей

*Дробно-рациональной функцией* (*рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов: , где *m*, *n* −целые положительные числа   

Рациональная дробь называется *правильной*, если , если  - *неправильной дробью.*

Всякую неправильную рациональную дробь  можно, путём деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы некоторого многочлена  и правильной рациональной дроби : .

*Простейшей дробью* называется дробь одного из следующих четырёх типов (I, II, III, IV):

(I) ;

(II) , ;

(III) , (корни знаменателя комплексные, т.е. );

(IV) , , (корни знаменателя комплексные),

где А, *а*, М, N, р, q *–* действительные числа.

*Теорема* (*о разложении правильной дроби на сумму простейших дробей*). Всякую правильную рациональную дробь , знаменатель которой разложен на множители ,

можно представить в виде следующей суммы простейших дробей:







где  - некоторые действительные коэффициенты.

Для нахождения неопределенных коэффициентов  в этом равенстве можно применить *метод сравнения коэффициентов*. Суть метода такова:

1) В правой части равенства приведем к общему знаменателю , в результате получим тождество , где  многочлен с неопределенными коэффициентами.

2) Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е. 

3) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  в обеих частях тождества , получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты.

*Правило интегрирования рациональных дробей*:

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

2. Если дробь правильная, представить дробь в виде суммы простейших рациональных дробей, разложив знаменатель дроби на множители.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти .

*Решение*:



.

***Задача 2***. Найти .

*Решение*:



.

***Задача 3***. Найти интеграл, используя интегрирование по частям:

1) ; 2) ; 3) .

*Решение*:

1) .

2) 

.

3) 



.

***Задача 4***. Найти интеграл 

*Решение*:







Отсюда

,

,

.

***Задача 5***. Найти интеграл: а)  б) 

*Решение*:

а) 



.

б) В этом интеграле, наоборот, сначала сделаем подстановку, а потом применим интегрирование по частям:





.

***Задача 6***. Представить неправильную рациональную дробь  в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби

*Решение*:

Разделим числитель дроби на знаменатель (по правилу деления многочленов),



Следовательно, .

***Задача 7***. Представить дробь  в виде суммы простейших дробей.

*Решение*:









.

***Задача 8***. Найти интеграл .

*Решение*:

Подынтегральная функция  - правильная рациональная дробь.

Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь - простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

.

Выделим производную знаменателя в числителе дроби:

.

Выделим в знаменателе полный квадрат: .

Отсюда:







.

***Задача 9***. Вычислить интеграл .

*Решение*:

Подынтегральная дробь - правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

.

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты А и В, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда



.

Решаем систему уравнений:



Таким образом, 

Тогда, исходный интеграл примет вид:

.

***Задача 10***. Вычислить интеграл.

*Решение*:

Подынтегральная дробь - правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:



Отсюда 

Разложим эту дробь на простейшие: 

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

.



Решаем систему уравнений:





Тогда исходный интеграл будет равен:

.

***Задача 11***. Найти интеграл 

*Решение*:

Под знаком интеграла неправильная дробь. Выделим целую часть путем деления числителя на знаменатель:



Получаем



Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:











Тогда 

Таким образом, подынтегральная функция примет вид:



Интегрируем полученное равенство









.

***Задача 12***. Вычислить интеграл .

*Решение*:

Данная подынтегральная дробь - неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:



.

Отсюда



Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших: 

.

Получим систему двух уравнений: 

Таким образом, .

Откуда





Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | **,** |

***Задание 2***. Найти интеграл 

***Задание 3***. Найти интеграл 

***Задание 4***. Найти интегралы от простейших дробей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 5***. Найти интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Привести свойства неопределенного интеграла.
3. Назовите методы вычисления интегралов.
4. В чем суть метода интегрирования по частям?
5. Привести свойства неопределенного интеграла.
6. Назовите методы вычисления интегралов.
7. Сформулировать теоремы, на которых основано интегрирование рациональных дробей.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти интегралы, используя интегрирование по частям:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  |  |

***Задание 2***. Найти интеграл 

***Задание 3***. Найти интеграл 

***Задание 4***. Найти интегралы от простейших дробей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | . |

***Задание 5.*** Найти интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | . |

**Практическое занятие 10**

**Определенный интеграл. Вычисление площадей плоских фигур**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Определенным интегралом* от функции  на отрезке  называется предел интегральных сумм  при условии, что длина наибольшего частичного отрезка стремится к нулю: 

Свойства определенного интеграла:

1. 
2. 
3.  т.е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой,
4. 
5. 
6. 
7. Если  на отрезке , то  если  для всех точек , то ,
8. Если  на отрезке , то 
9. Если наибольшее,  наименьшее значение  на отрезке , то 
10.  (теорема о среднем),
11. 
12. .

*Формула Ньютона – Лейбница:* .

*Методы интегрирования:*

*Интегрирование подстановкой.*Пусть для вычисления интеграла  от непрерывной функции сделана подстановка .

*Теорема*. Если :

1) функция  и ее производная  непрерывна при ;

2) множеством значений функции  при  является отрезок ;

3) , , то .

Замечания:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки  применяют подстановку ;

3) при замене переменных, необходимо изменить и пределы интегрирования.

*Интегрирование по частям.* Рассмотрим теперь, как выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле.

Если функции  и  имеют непрерывные производные на отрезке , то имеет место формула  где 

Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Функция  непрерывна на отрезке , симметричном относительно точки .

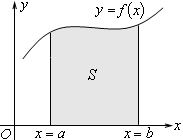


*Вычисление площадей плоских фигур*

Вычисление площади плоской фигуры сводится к вычислению площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке  задана непрерывная функция .

Фигура ограниченная сверху графиком функции , снизу – осью *Ох*, сбоку – прямыми  и , называется *криволинейной трапецией*.



Определенный интеграл от неотрицательной функции числено равен площади криволинейной трапеции, т.е. .

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ох , то ее площадь может быть найдена по формуле .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Вычислить .

*Решение*:

.

***Задача 2***. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл .

*Решение*:

Подынтегральная функция  на отрезке  имеет первообразную .

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница имеем: .

***Задача 3***. Вычислить интеграл .

*Решение*:

Подынтегральная функция имеет «почти табличный» вид. Для нахождения первообразной проведем



.

***Задача 4***. Найти значение интеграла .

*Решение*:

Это «почти табличный» интеграл. Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона-Лейбница) применим формулу понижения степени:





.

***Задача 5***. Вычислить .

*Решение*:

Под знаком интеграла стоит рациональная дробь. Для нахождения первообразной разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:



Тогда , т.е.



Отсюда



Итак, 

Первое и второе слагаемые имеют табличные интегралы, третье – «почти табличные». Поэтому



.

***Задача 6***. Найти значение интеграла , если 

*Решение*:

Подынтегральная функция имеет на отрезке  одну точку разрыва  первого рода, ограничена на нем. Тогда:

.

***Задача 7***. Вычислить.

*Решение*:





.

***Задача 8***. Вычислить интеграл  с помощью замены переменных.

*Решение*:



.

***Задача 9***. Вычислить.

*Решение*:



.

***Задача 10***. Найти значение .

*Решение*:

Интегрируем по частям: *u = x2, dv = sin 2x dx, du = dx, v =*



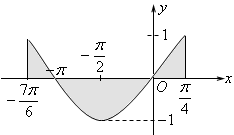




.

***Задача 11***. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой , прямыми , , .

*Решение*:



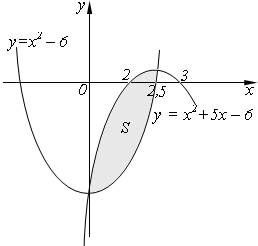
Площадь фигуры находим по формуле



.

***Задача 12***. Найти площадь фигуры ограниченной линиями  и 

*Решение*:



Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений 

Искомую площадь находим по формуле:



2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***.Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 2***. Найти интегралы от рациональных дробей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 3***. Вычислить интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |

***Задание 4***. Вычислить интегралы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 5***. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , . |  | , , , . |

***Задание 6***. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , ,  , . |  | , , ,  , . |
|  | , . |  | , . |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение определенного интеграла. Сформулируйте его свойства.
2. Сформулировать теорему о существовании производной у интеграла с переменным верхним пределом.
3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
4. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
5. Приведите методы вычисления определенного интеграла.
6. В чем геометрический смысл определенного интеграла?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***.Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интегралы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |  |  |

***Задание 2***. Найти интеграл от рациональных дроби 

***Задание 3***. Вычислить интегралы: а) , б) .

***Задание 4***. Вычислить интегралы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |  |  |
|  | , |  | , |  |  |

***Задание 5***. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: , , .

***Задание 6***. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , , . |  | , . |
|  | , . |  |  |

**Практическое занятие 11**

**Несобственные интегралы**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определенный интеграл , где промежуток интегрирования  - конечный, а подынтегральная функция  непрерывна на отрезке , называют еще *собственным интегралом*.

Рассмотрим так называемые *несобственные интегралы*, т.е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Пусть функция  непрерывна на промежутке . Если существует конечный предел , то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают: , т.е. .

В этом случае говорят, что несобственный интеграл  *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл  - *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке :

.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

, где *с* – произвольное число.

При этом интеграл  называется сходящимсялишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Если хотя бы один из интегралов правой части расходится, то расходится и интеграл слева.

Пусть функция  непрерывна на промежутке  и имеет бесконечный разрыв при . Если существует конечный предел , то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают: ,

.

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл  - *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл  - *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке , т.е. функция  терпит бесконечный разрыв в точке :

.

Если функция терпит разрыв во внутренней точке с отрезка , то несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

.

В этом случае интеграл слева называется сходящимся, если сходятся оба несобственных интеграла, стоящих справа.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Вычислить несобственный интеграл  или установить его расходимость.

*Решение*:

По определению несобственного интеграла 1 рода имеем:

.

Интеграл сходится и его величина равна 1.

***Задача 2***. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) , б) .

*Решение*:

а) .

 - не существует. Следовательно, интеграл расходится.

б) , интеграл расходится.

***Задача 3***. Исследовать сходимость несобственного интеграла.

*Решение*:

По определению несобственного интеграла 1 рода



,

интеграл расходится, т.к. не существуют.

***Задача 4***. Вычислить несобственный интеграл .

*Решение*:

Подынтегральная функция  определена и непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, она является четной. Следовательно,



Исходя из определения несобственного интеграла, имеем

,

интеграл сходится.

Следовательно, исходный интеграл также сходится и равен π.

***Задача 5***. Исследовать на сходимость интеграл 

*Решение*:

Здесь  при , при этом  но интеграл  расходится так как 

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл  расходится.

***Задача 6***. Вычислить .

*Решение*:

.

Следовательно, интеграл расходится.

***Задача 7***. Вычислить несобственный интеграл  или установить его расходимость.

*Решение*:

Подынтегральная функция терпит разрыв при 

.

Согласно формуле, имеем

,

интеграл сходится и его величина составляет 

***Задача 8***. Вычислить значение интеграла 

*Решение*:

При  функция  По формуле имеем

,

т.к. . Интеграл сходится и равен –1.

***Задача 9***. Исследовать на сходимость интеграла 

*Решение*:

Внутри отрезка интегрирования  функция при , неограниченно возрастает. Согласно формуле имеем



.

Интеграл расходится.

***Задача 10***. Исследовать на сходимость интеграл 

*Решение*:

Функция терпит бесконечный разрыв в точке . Перепишем ее в виде , и сравним ее с функцией . Как известно, интеграл  сходится . Так как

,

то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл также сходится.

***Задача 11***. Исследовать на сходимость интеграл 

*Решение*:

Подынтегральная функция  разрывна в точке . Сравним ее с функцией  Так как .

Но несобственный интеграл  сходится. Следовательно, интеграл  по признаку сравнения также сходится.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Найти значение несобственных интегралов или установить их расходимость:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 2***. Исследовать сходимость несобственного интеграла .

***Задание 3***.Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |

***Задание 4***.Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |

***Задание 5***.Исследовать сходимость несобственного интеграла .

***Задание 6***. Исследовать сходимость несобственного интеграла .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулировать определение несобственных интегралов.
2. Сформулировать определение несобственных интегралов 1 рода.
3. Обосновать условия сходимости несобственных интегралов 1 рода.
4. Сформулировать определение несобственных интегралов 2 рода.
5. Обосновать условия сходимости несобственных интегралов 2 рода.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти значение несобственных интегралов или установить их расходимость:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | . |

***Задание 2***. Исследовать сходимость несобственного интеграла 

***Задание 3***.Вычислить несобственный интеграл  или установить его расходимость.

***Задание 4***.Вычислить несобственный интеграл  или установить его расходимость.

***Задание 5***.Исследовать сходимость несобственного интеграла .

***Задание 6***. Исследовать сходимость несобственного интеграла .

**Практическое занятие 12**

**Числовые и степенные ряды**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Числовые ряды

Пусть задана числовая последовательность , .

*Выражение  (1) называется числовым рядом,  - членами данного ряда,  - общий член.* Сумма , т.е. сумма первых *n* слагаемых ряда, *n*-ой частичной суммой.

*Если существует конечный предел , то ряд называется сходящимся, а число S - суммой этого ряда. Если же предел  не существует или равен , то ряд называется расходящимся.*

*Основные свойства сходящихся числовых рядов.*

1. На сходимость числового ряда (1) не влияет отбрасывание конечного числа его членов.
2. Если сходится числовой ряд (1) и его сумма равна S, то ряд ,  также сходится и его сумма *сS*.
3. Если ряд (1) и ряд  (2) сходятся и их суммы соответственно равны S1 и S2, то ряды ,  также сходятся и их суммы равны соответственно *(S1+S2)*, *(S1-S2).*

*Необходимый признак сходимости числового ряда.*

Если ряд (1) сходится, то . Если , то ряд является расходящимся.

*Ряд (1) называется рядом с положительными членами, если un>0, n=1,2…, т.е. если все его члены положительны.*

Приведём важнейшие *достаточные признаки сходимости* рядов с положительными членами.

*Признак сравнения***.** Пусть ряды (1) и (2) являются рядами с положительными членами. Кроме того, пусть *un*<*vn* , *n=1,2,..*. .Тогда если ряд (2) сходится, то сходится ряд (1); если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

*Признак Даламбера***.** Если ряд (1) является рядом с положительными членами., для которого существует предел , то при

а) w>1 ряд (1) расходится,

б) w<1 ряд (1) сходится.

*Радикальный признак Коши.* Если ряд (1) является рядом с положительными членам, для которого существует предел , то при

а) w>1 ряд (1) расходится,

б) w<1 ряд (1) сходится.

*Интегральный признак Коши.* Пусть ряд (1) является рядом с положительными членами, функция для всех  определена, неотрицательна и убывает, . Тогда ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл 

Ряд  при  расходится, при  - сходится. При  имеем расходящийся ряд, который называется *гармоническим***.** Ряд  составленный из членов геометрической прогрессии, при  сходится, при  расходится.

*Ряд (1), содержащий бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, называется знакопеременным***.**

*Знакопеременный ряд  (3) называется абсолютно сходящимся, если ряд  (4) сходится.*

Если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то он просто сходится, т.е. если сходится ряд (4), то сходится ряд (3). Обратное утверждение вообще говоря не имеет места, т.е. из сходимости ряда (3) не следует сходимость ряда (4).

*Ряд вида  (5), где  называется знакочередующимся рядом.*

*Теорема Лейбница.* Если для знакочередующегося ряда ** выполняются условия

а) , (6)

б) , (7)

то ряд сходится.

Пусть выполнены условия теоремы Лейбница (6), (7), и , *,* - соответственно частичная сумма, сумма и n-й остаток ряда (5). Тогда справедлива оценка .

Степенные ряды

*Ряд  (8) членами которого являются функции, определённые на некоторой области X, называется функциональным рядом.*

*Область  такая, что при каждом фиксированном  ряд (8) сходится, называется областью сходимости функционального ряда (8).* Область сходимости  функционального ряда можно найти, путём непосредственного применения достаточных признаков сходимости (Даламбера, Коши) к ряду . Обозначим .  и  называются соответственно частичной суммой и остатком ряда (8).

Функция ,  называется суммой ряда (8).

*Функциональный ряд (8) называется равномерно сходящимся в области , если для любого действительного числа существует такое натуральное число N, что при  выполняется неравенство  для всех .* Если ряд (8) равномерно сходится в , то его сумма непрерывна в .

*Признак Вейерштрасса.* Пусть даны два ряда: функциональный (8), члены которого определены на множестве *Х* и числовой с положительными членами  (9). Тогда если ряд (9) сходится и для любого выполняется неравенство  то ряд (8) сходится равномерно на *Х*.

Ряд (9) принято называть мажорирующим рядом для функционального ряда (8).

Пусть члены функционального ряда (8) непрерывны в области *Х0*, ряд (8) сходится равномерно в *Х0* и *S(x)*-его сумма. Тогда ряд   также сходится и его сумма равна .

Пусть члены  ряда (8) непрерывно дифференцируемы в области *X0*, ряд сходится равномерно в *X0*. Тогда имеет место равенства , .

*Функциональный ряд вида*

** (10)

*где  - действительные числа, называется**степенными***.**

Если степенной ряд (10) сходится при , то он абсолютно сходится при любом *х*, удовлетворяющем неравенству , если ряд (10) расходится при , то он расходится при *х*, удовлетворяющем неравенству (теорема Абеля).

Из теоремы Абеля следует, что область сходимости степенного ряда (10) всегда представляет собой интервал вида ,т.е. , с центром в точке х0.

Интервал называется интервалом сходимости данного ряда. Число *R* (равное половине длины интервала сходимости) называется радиусом сходимости *R* может быть найдены по одной из формул:

а)  (если среди коэффициентов  данного степенного ряда нет равных нулю)

б) .

На концах интервала сходимости ряд (10) может как сходится, так и расходится. Поэтому требуется всегда проводить дополнительные исследования на сходимость степенного ряда в этих точках. Если , то ряд (10) сходится при всех 

Операции почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда (10) можно производить сколь угодно раз (т.е. сумма S(x) ряда (10) является бесконечно дифференцируемой функцией). Ряды, полученные почленным дифференцирование или интегрированием, имеют тот же и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно , или , бесконечно дифференцируема в интервале .

Пусть функция  и для всех выполняется условие , , тогда  можно разложить в этом интервале в степенной ряд  (13) называемый рядом Тейлора, сходящийся к при всех . При ряд Тейлора называется рядом Маклорена. Приведём разложения в ряд Тейлора и Маклорена некоторых функций.





ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача* 1.** Найти сумму ряда .

*Решение:*

По свойствам сходящихся рядов. Общий член в правой части этого равенстваимеет вид . Разлагая  на множители, будем иметь . Представим *un* в виде, *А=const B=const.* Найдем постоянные А и В.

.

Отсюда следует, что

. Значит .

. Частичная сумма *Sm* данного ряда равна

.

Итак, .

***Задача 2*.** Найти сумму ряда .

*Решение:*

Представим общий член  данного ряда в виде , *A=const*, *B=const*, *C=const*. Найдём неизвестные постоянные *А, В, С* 

Следовательно, .

.

Окончательно получаем .

***Задача 3.*** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение:*

Данный ряд представляет собой с положительными членами. Общий член этого ряда . Построим оценку сверху для  ряд с общим членом  сходится, т.к. показатель степени . Значит, по признаку сравнения рядов с положительными членами, ряд  сходится.

***Задача 4.*** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение:*

Используя неравенство , оценим сверху общий член  данного ряда, представляющего собой ряд с положительными членами ряд с общим членом  сходятся, так как показатель степени . Поэтому по признаку сравнения рядов с положительными членами ряд  сходится.

***Задача 5.*** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение:*

Данный ряд представляет собой, очевидно, ряд с положительными членами. Используя неравенство , можно записать .

Из последнего неравенства (по признаку сравнения рядов с положительными членами) следует, что ряд с общим членом *vn* будет сходящимися.

Применим признак Даламбера , ,

,  т.к. *0<1*, то ряд с общим членом *vn* сходится. А значит, сходится и исследуемый ряд.

***Задача 6.*** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение:*

Рассмотрим общий член данного ряда , при  поэтому при . Рассмотрим числовой ряд с общим членом   и исследуем его на сходимость.

Воспользуемся признаком сходимости Коши , .

Значит, ряд с общим членом  сходится. По признак сравнения рядов сходится ряд с общим членом .

***Задача 7.*** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение:*

Рассмотрим общий член данного ряда  , и оценим его сверху



Рассмотрим числовой ряд с общим членом  и исследуем его на сходимость. Воспользуемся интегральным признаком сходимости Коши (все условия, которые необходимы для применения этого признак, очевидно, выполняется) ,

,

значит, ряд с общим членом  - сходится. Поэтому (по признаку сравнения рядов) сходится и исследуемый ряд .

***Задача 8.*** Исследовать на сходимость ряд .

*Решение:*

Данный ряд является знакочередующимся рядом. Применим признак Лейбница. Функция монотонно возрастает при , т.к.  Поэтому при натуральных значениях  (т.е. при *x=n, n=3,4*...) имеем,  следовательно, выполнено первое условие признак Лейбница поскольку

,

то выполнено и второе условие этого признак. Ряд сходится.

***Задача 9.*** Вычислить сумму ряда с точность 

*Решение:*

Т.к. данный ряд знакочередующийся, то , где *Rn* остаток данного ряда. При *n=2*  поэтому с точность , .

***Задача 10.*** Найти область сходимости функционального ряда .

*Решение:*

Применим признак Даламбера. Так как этот признак применим только для рядов с положительными членами, то исследуем данный ряд сразу на абсолютную сходимость.

В нашем случае , ,

.

Ряд сходится (и притом абсолютно), если  Решив данное неравенство, находим *x<0.* Итак, данный ряд сходится (и притом абсолютно) при . При  признак Даламбера ответа не даёт. В этом случае ряд нужно исследовать особо. Данное равенство возможно только при *х=0* имеем знакочередующийся ряд . Применяя признак Лейбница, легко установить, что данный ряд сходится (т.к. 

Поэтому заданный функциональный ряд сходится в точке *х=0*. Итак, область сходимости ряда является множество всех 

***Задача 11.*** Найти область сходимости функционального ряда .

*Решение:*

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость с помощью радикального признака Коши. Имеем ,

,

учитывая, что , , где  при фиксированном х, получим  при  т.е. при , 

Ряд абсолютно сходится. При  т.е. при  ряд сходится.

Пусть теперь . Тогда  при  имеем числовой ряд  этот ряд сходится (и притом абсолютно), т.к. .

, а ряд с общим членом  сходится . Аналогично убеждаемся, что при  числовой ряд  также сходится (и притом абсолютно).

Следовательно, область сходимости данного функционального ряда есть множество всех, .

***Задача 12.*** Найти область сходимости функционального ряда .

*Решение:*

Исследуем ряд на абсолютную сходимость с помощью радикального признака Коши.





Т.к. , то , .

Поэтому данный функциональный ряд сходится абсолютно при всех действительных *х*.

***Задача 13.*** Найти область сходимости функционального ряда .

*Решение:*

Воспользуемся радикальным признаком Коши ,   при , т.е. при  ряд сходится абсолютно. При , т.е. при  ряд расходится. При , т.е. при  получаем соответственно два числовых ряда

, .

Первый - знакочередующийся ряд. С помощью теоремы Лейбница заключаем, что этот ряд сходится, т.к. .

Второй ряд - это ряд с положительными членами. Легко видеть, что он расходится, т.к. , следовательно, областью сходимости данного функционального ряда является множество 

***Задача 14.*** Найти сумму ряда .

*Решение:*

Найдём область, в которой данный ряд сходится (абсолютно). Имеем



-1<x<1. Итак, при  данный функциональный ряд сходится абсолютно. Более того, получающиеся при  числовые ряды  и  также сходятся (абсолютно) т.к.  , а ряд с общим членом  сходится.

Из сходимости степенного ряда в интервале (-1,1) следует, что сумма этого ряда S(x) имеет в (-1,1) производные любого порядка. При этом в (-1,1) имеет место равенство  Умножим левую и правую часть последнего равенства на , а затем его продифференцируем 

, .

Из равенства ,  следует,



.

Решив дифференциальное уравнение , при начальных условиях , найдём

.

***Задача 15.*** Найти сумму ряда .

*Решение:*

Используя признак Даламбера можно легко убедится (см. решение задач 10-13), что данный ряд сходится абсолютно при . Поэтому данный ряд можно почтенно интегрировать при всех . Обозначая через S(x) сумму данного ряда и разлагая  на множители можно записать . Интегрируя равенство в пределах от 0 до х, получим . Обозначим *S1(x)=,* тогда , дифференцируя равенство , получим

,

т.к. , то , т.е. .

***Задача 16.*** Разложить функцию  в ряд Тейлора по степеням х.

*Решение:*

Т.к. , то пологая *t=5x*, будем иметь

***Задача 17.*** Вычислить интеграл  с точностью до 0,001.

*Решение:*

 то при  будем иметь

Таким образом, Задание вычисления определённого интеграла свелась к вычислению суммы числового знакочередующегося ряда.

Так как абсолютная величина остатка этого ряда меньше абсолютной величины первого из отброшенных членов, т.е. , то для вычисления суммы ряда с точностью 0.001 (а значит и данного интеграла) достаточно ограничится суммой двух первых его членов, т.к.

.

Следовательно, с точностью 0.001

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание* 1.** Найти сумму ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 2.** Найти сумму ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 3.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 4.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 5.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 6.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 7.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 8.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 9.** Вычислить сумму ряда с точностью 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 10*.** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 11*.** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 12.*** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 13.*** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 14.*** Найти сумму ряда

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 15.*** Найти сумму ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Задание 16.** Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням *х*.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Задание 17.** Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение числового ряда.
2. Сформулируйте свойства сходящихся рядов.
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
4. Перечислите достаточные признаки сходимости числовых рядов.
5. Сформулируйте достаточные признаки сходимости числовых рядов
6. Дайте определение знакопеременного ряда.
7. Дайте определение знакочередующегося ряда.
8. Сформулируйте Теорему Лейбница.
9. Дайте определение функционального ряда.
10. Что называют областью сходимости функционального ряда?
11. Когда функциональный ряд называют равномерно сходящимся?
12. Сформулируйте признак Вейерштрасса.
13. Дайте определение степенного ряда.
14. Сформулируйте теорему Абеля.
15. Запишите ряд Тейлора, Маклорена.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание* 1.** Найти сумму ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 2.** Найти сумму ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 3.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 4.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 5.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 6.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 7.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 8.** Исследовать на сходимость ряд.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание* 9.** Вычислить сумму ряда с точностью 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 10*.** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 11*.** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 12.*** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 13.*** Найти область сходимости функционального ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 14.*** Найти сумму ряда

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 15.*** Найти сумму ряда.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Задание 16.** Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням *х*.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Задание 17.** Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Практическое занятие 13**

**Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида , где  и  – данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными*.

Это уравнение можно переписать в виде  и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием:  - общий интеграл.

Уравнение вида , где  – заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной *х* окажутся в одной части равенства, а переменная *y* - в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Это легко сделать путем почленного деления уравнения на . Получаем ,

 - общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления дифференциального уравнения на  могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения, – *особые решения*.

2. Уравнение , где  - числа, путем замены  сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Дифференцируя по *х*, получаем .

Данное уравнение принимает вид , откуда следует

.

Интегрируя это уравнение и заменяя *u* на , получим общий интеграл исходного уравнения.

Однородные уравнения первого порядка

Функция  называется однородной функцией n-го порядка (измерения), если приумножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на , т.е. .

Дифференциальное уравнение  называется однородным, если функция  есть однородная функция нулевого порядка.

Уравнение  может быть представлено в виде .

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

 или, что то же самое, .

Однородное дифференциальное уравнение часто задается в дифференциальной форме: .

Это дифференциальное уравнение будет однородным, если  и - однородные функции одного порядка.

Переписав уравнение  в виде ,

и применив в правой части преобразование, рассмотренное выше, получим уравнение .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти общее решение уравнения .

*Решение*:

Поскольку уравнение с разделенными переменными, то интегрируя, получим общее решение

, .

Как видим решение на плоскости *Оху* представляет семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом *С*.

***Задача 2***. Решить дифференциальное уравнение .

*Решение*:

Разделим уравнение на , тогда получим

.

Интегрируем

,

.

***Задача 3***. Найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальному условию:  при .

*Решение*:

Представим уравнение в виде

, или .

Делим переменные .

Интегрируем

,

,

,

 - общее решение уравнения.

Подставим в общее решение начальные условия ,

Откуда .

Частное решение будет  или .

***Задача 4***. Найти общий интеграл уравнения 

*Решение*:

Используя подстановку , 

будем иметь , тогда , .

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

,

, или 

,

,

,

.

Делая обратную подстановку, получим , .

***Задача 5***. Найти общий интеграл и особые решения уравнения .

*Решение*:

Перепишем уравнение в виде .

Разделим переменные .

Интегрируем обе части:

,

.

Отсюда

,

,

, или .

Тогда общий интеграл будет иметь вид:



Чтобы решить вопрос об особом решении, приравняем нулю выражение , на которое делили обе части уравнения: , .

Эти решения являются особыми, так как не могут быть получены из общего решения ни при одном числовом значении произвольной постоянной С.

***Задача 6***. Проинтегрировать уравнение .

*Решение*:

Разрешим данное уравнение относительно производной

.

Правая часть уравнения функция однородная нулевой степени, следовательно, данное уравнение однородное.

Поскольку правая часть уравнения является функцией отношения , то делаем замену , или , 

Подставляем значения  и  в уравнение получим уравнение с разделяющимися переменными:

,

.

Разделим переменные и проинтегрируем:

,

,

.

Подставляя вместо u его значение, окончательно получим

.

***Задача 7.*** Решить уравнение .

*Решение*:

Разделив правую и левую части уравнения на *dx*, преобразуем уравнение к виду:



.

Так как коэффициенты пропорциональны , т.е. ,

то используем подстановку ,

, или .

Учитывая, что ,

подставляем *u* и  в уравнение, получим

,

,

.

Разделим переменные и проинтегрируем:

,

.

Выделив в числителе подынтегральной функции знаменатель дроби, получим: , тогда

,

,

,

.

Переходя к старым переменным, общее решение уравнения примет вид:

,

,

,

.

***Задача 8***. Проинтегрировать уравнение .

*Решение*:

Если считать, что *х* и *dx* величины первого измерения, а *y* и *dy* измерения , то исходное уравнение можно отнести к обобщенному однородному дифференциальному уравнению.

Воспользуемся заменой , ,

тогда

,

,

,

,

,

.

Разделим переменные и проинтегрируем

,

,

,

,

, .

Переходя к старым переменным, окончательно получим:

, или , .

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Решить дифференциальное уравнение 

***Задание 2***. Найти общие интегралы уравнений, особые решения и частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

а) , если ,

б) , если ,

в) , если ,

***Задание 3***. Найти общий интеграл уравнения .

***Задание 4***. Проинтегрировать уравнения: а) , б) .

***Задание 5.*** Решить уравнение .

***Задание 6***. Найти решения уравнений: а) , б) .

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Решить дифференциальное уравнение .

***Задание 2***. Найти общие интегралы уравнений, особые решения и частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

а) , если , б) , если ,

***Задание 3***. Проинтегрировать уравнение , если , при .

***Задание 4***. Найти решение уравнения 

**Практическое занятие 14**

**Линейные ДУ первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Уравнение Лагранжа и Клеро**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется линейным, если его можно записать в виде , где некоторые (непрерывные) функции переменной *х*, в частности – постоянные.

*Метод Бернулли.* Решение уравнения  будем искать в виде произведения двух других функций, т.е. с помощью подстановки , где неизвестные функции от *х*, причем одна из них произвольна (но не равна нулю), а другая должна определяться из уравнения .

Так как , то .

Подставляя выражения у и  в уравнение , получим:



.

Подберем функцию так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т.е. решим уравнение.

Итак, , т.е. .

Интегрируя, получаем .

Ввиду свободы выбора функции , можно принять . Отсюда

.

Подставляя найденную функцию в уравнение , получаем .

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

,

,

.

Возвращаясь к переменной *у*, получаем решение исходного дифференциального уравнения: .

*Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).* Рассмотрим уравнение  без правой части, т.е. уравнение

.

Оно называется линейным однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка. В этом уравнении переменные делятся:

, ,

, .

Таким образом,   или , где .

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную *с* в полученном решении заменяем функцией . Решение уравнения  ищем в виде . Находим производную



.

Подставим значения  и  в уравнение : 

.

Второе и третье слагаемое взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид

.

Следовательно,

,

,

.

Подставим выражение  в равенство , получим общее решение дифференциального уравнения :

.

*Уравнение Бернулли****.*** Уравнение вида  ,  называется уравнением Бернулли.

Если , то дифференциальное уравнение - линейное, а при  - с разделяющимися переменными.

В общем случае, разделив уравнение на  получим:

.

Обозначим , тогда 

Отсюда находим .

Уравнение  примет вид .

Последнее уравнение является линейным относительно *z*. Решение его известно. Таким образом, подстановка  сводит уравнение  к линейному. На практике удобнее искать решение дифференциального уравнения методом Бернулли в виде  (не сводя его к линейному).

Уравнение  называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции , т.е. .

В этом случае дифференциальное уравнение  можно записать в виде , а его общий интеграл будет:

.

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение



есть полный дифференциал.

Для того чтобы выражение , где функции  и их частные производные и  непрерывны в некоторой области плоскости Оху, было полным дифференциалом необходимо и достаточно выполнение условия .

Искомая функция должна удовлетворять требованиям:

 и .

Если в уравнении  зафиксировать *у* и проинтегрировать его по *х*, то получим 

Уравнение вида , где  и - известные функции от , называется *уравнением Лагранжа*.

Частный случай уравнения Лагранжа: при  уравнение принимает вид , и называется *уравнением Клеро*.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Решить уравнение .

*Решение*:

Воспользуемся методом И. Бернулли, для этого производя замену

, ,

получим

,

. (\*)

Выберем *v* так, чтобы , .

Разделяя переменные и интегрируя, получим ,

, .

Подставляя найденное значение *v* в уравнение (\*), получим

,

, ,

.

Общее решение будет .

***Задача 2***. Найти общий интеграл уравнения 

*Решение*:

Уравнение сводится к линейному, если считать *y* за независимую переменную, а *х* – за функцию.

Запишем исходное уравнение в виде , или ,

.

Используя замену , , получим ,

. (\*)

Находим *v*:

, ,

, ,

, .

Подставляя найденное значение *v* в уравнение (\*), получим

, или ,

,  .

Общее решение будет .

***Задача 3***. Решить уравнение .

*Решение*:

Воспользуемся методом Лагранжа. Найдем сначала решение однородного уравнения .

Разделим переменные и проинтегрируем: , ,

, или , .

Пусть постоянная интегрирования зависит от *х*, т.е. , тогда

, (\*)

.

Подставляем у и  в исходное уравнение ,

, или ,

, , 

Подставляя найденное значение  в уравнение (\*), получим

,

Общее решение уравнения .

***Задача 4***. Решить уравнение .

*Решение*:

Вначале убедимся, что данное уравнение в полных дифференциалах, т.е что

.

Пусть , ,

тогда

, .

Так как равенство справедливо, то общий интеграл находим по формуле

,

считая, что , :

,

.

Отсюда общее решение .

***Задача 5***. Решить уравнение , если .

*Решение*:

Запишем уравнение в дифференциальной форме

.

Здесь

,

.

Проверим выполнение условия .

,

.

Так как равенство выполняется, то данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию , используя равенства

1) , 2) .

Интегрируя первое равенство по *х*, находим

,

где,  - произвольная дифференцируемая (по *у*) функция. Найдем . Продифференцировав полученное равенство по у и учитывая второе равенство, получаем ,

откуда , т.е. .

Следовательно, .

Общим интегралом является соотношение

, или

, где .

Найдем частный интеграл уравнения, для чего подставим начальное условие  при  в общий интеграл:

,

.

Таким образом, искомый частный интеграл имеет вид:

.

***Задача 6***. Решить уравнение .

*Решение*:

Уравнение имеет вид

,

т.е. данное уравнение есть уравнение Клеро.

Положим .

Тогда заданное уравнение примет вид .

Продифференцировав его по *x*, имеем:

,

,

.

Если , то  и, значит, общее решение данного уравнения

.

Если , т.е. , то получаем .

Особое решение заданного уравнения будем искать в виде



т.е. особое решение уравнения в явном виде .

***Задача 7***. Решить уравнение Лагранжа: .

*Решение*:

Положим . Тогда имеем .

Дифференцируя по *х*, приходим к уравнению

,

,

,

.

Отсюда , т.е. ,

линейное относительно *х* и  уравнение. Решим его методом Бернулли.

Используя подстановку , ,

получаем

,

. (\*)

Находим *v* из уравнения

, ,

, ,

, .

Подставляем найденное значение  в уравнение (\*), получаем

, .

Отсюда ,

, .

Следовательно,

,

.

Учитывая, что , получим

.

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид (в параметрической форме)



особого решения нет.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Решить уравнение , удовлетворяющее начальному условию .

***Задание 2***. Найти решение уравнения .

***Задание 3***. Решить уравнение .

***Задание 4***. Решить уравнения: а) , б) ,

***Задание 5***. Решить уравнения: а) , б) ,

***Задание 6***. Решить уравнения: а) , б) ,

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти решение уравнений: а) , б) .

***Задание 2***. Решить уравнение 

***Задание 3***. Решить уравнение .

***Задание 4***. Решить уравнение .

**Практическое занятие 15**

**Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Одним из методов интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является метод понижения порядка. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное дифференциальное уравнение сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1) Пусть дано уравнение .

Порядок его можно понизить, введя новую функцию , положив . Тогда,  и получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка: .

Решив его, т.е. найдя функцию , решим уравнение . Получим общее решение заданного уравнения .

На практике поступают иначе: порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

Частным случаем линейных однородных дифференциальных уравнений являются ЛОДУ *с* *постоянными коэффициентами*.

Пусть дано ЛОДУ второго порядка , где *p*, *q* постоянны.

Для нахождения общего решения этого уравнения достаточно найти два частных решения, образующих фундаментальную систему. Будем искать частные решения уравнения в виде , где  некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируя эту функцию дважды, находим значения 

Подставив найденные значения в исходное уравнение, получим:



,

Следовательно,  должно быть решением квадратного уравнения



Это уравнение называется характеристическим уравнением ДУ. Для его составления достаточно в уравнении заменить  соответственно на .

При решении характеристического уравнения возможны три случая:

1) Характеристическое уравнение  имеет различные действительные корни  и  .

В этом случае частными решениями уравнения являются функции

 и .

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид: 

2) Характеристическое уравнение имеет действительные равные корни .

В этом случае имеем лишь одно частное решение .

Нетрудно показать, что наряду с  решением уравнения будет и . Тогда общее решение уравнения имеет вид:



3) Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни  и .

В этом случае частными решениями уравнения являются функции

 и .

Общее решение уравнения имеет вид:

,



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти общее решение дифференциального уравнения .

*Решение*:

Поскольку правая часть зависит только от *х*, то интегрируем правую и леву части последовательно четыре раза. Получим

,

,

,

.

***Задача 2***. Проинтегрировать уравнение .

*Решение*:

Данное дифференциальное уравнение не содержит явно искомую функцию у, следовательно, понизить его порядок можно с помощью подстановки , .

Отсюда

,

.

Это линейное уравнение, поэтому делаем замену

,

.

Получаем

,

. (\*)

Находим *v* из уравнения

,

, ,

,

,

.

Находим *u*, подставив найденное значение *v* в уравнение (\*):

,

, ,

.

Тогда

,

.

Но , поэтому .

Интегрируя, находи общее решение уравнения

,

.

***Задача 3***. Проинтегрировать уравнение .

*Решение*:

Уравнение не содержит в явном виде независимой переменной *х*, поэтому делаем замену , .

Тогда

,

,

 и .

При , решение уравнения , .

При отыскании решения уравнения  разделим переменные и проинтегрируем

, ,

, ,

, .

Так как , то , ,

,

.

Таким образом, общее решение ДУ имеет вид

 и .

***Задача 4***. Найти решение уравнения .

*Решение*:

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

,

, .

Поскольку корни действительные и , то общее решение имеет вид

.

***Задача 5***. Найти решение уравнения .

*Решение*:

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

,

.

Поскольку корни действительные и кратные, то общее решение имеет вид

.

***Задача 6***. Найти решение уравнения .

*Решение*:

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

,

.

Поскольку корни комплексно-сопряженные и , ,

то общее решение уравнения имеет вид

,

или согласно равенству , имеем .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Найти общее решение дифференциального уравнения , при , , , .

***Задание 2***. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) , б) .

***Задание 3***. Найти частное решение дифференциального уравнения , удовлетворяющее начальным условиям: , .

***Задание 4***. Проинтегрировать уравнение .

***Задание 5***. Проинтегрировать уравнения: а) , б) .

***Задание 6***. Найти решение уравнения , если , .

***Задание 7***. Найти решения уравнений:

а) , б) ,

в) , г) ,

***Задание 8***. Найти решения уравнений: а) , б) ,

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) , б) .

***Задание 2***. Проинтегрировать уравнение , если , .

***Задание 3***. Проинтегрировать уравнения: а) , б) .

***Задание 4***. Найти решения уравнений:

а) , б) ,

в) , г) ,

д) , е) .

***Задание 5***. Найти решения уравнение .

***Задание 6***. Найти решение уравнения , если , , , , .

**Практическое занятие 16**

**Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами , где *p*, *q* – некоторые числа.

Известно, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами равно сумме общего решения *u* соответствующего однородного уравнения и частного решения  неоднородного уравнения, т.е. .

Частное решение уравнения может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Но для уравнений с постоянными коэффициентами существует более простой способ нахождения  (метод неопределенных коэффициентов), если правая часть  уравнения имеет так называемый «специальный вид»:

1. 

2. 

Суть метода неопределенных коэффициентов состоит в том, что по виду правой части  уравнения записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в исходное уравнение и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

1. Если правя часть имеет вид , где многочлен й степени, то частное решение уравнения ищут в виде: , где *r* – число, равное кратности m как корня характеристического уравнения  (т.е. *r* – число, показывающее, сколько раз m является корнем уравнения ), а некоторый многочлен й степени , записанный с неопределенными коэффициентами .

а) Пусть . Тогда

, ,

,

.

После подстановки функции  и ее производных в исходное уравнение, сокращения на , получим: .

Слева многочлен степени *n* с неопределенными коэффициентами, справа – многочлен степени *n* с известными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *х*, получим систему (*n+*1) алгебраических уравнений для определения коэффициентов .

б) Пусть . Тогда , .

в) Пусть . Тогда , .

2. Если правая часть уравнения имеет вид ,

где  и  многочлены степени *n* и *m*,  - действительные числа, то частное решение  уравнения ищут в виде: 

где *r* – число, равное кратности  как корня характеристического уравнения ,  - многочлены степени  с неопределенными коэффициентами,  - наивысшая степень многочленов  и , т.е. .

Системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим один из методов интегрирования нормальных систем уравнений в случае, когда она представляет собой систему линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами, т.е. систему вида:



Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями :



где все коэффициенты  постоянные.

Частное решение системы будем искать в виде:

, , , .

Подставив эти функции в систему и сократив на множитель , получим:

 или 

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:



В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно *k*. Это уравнение называется *характеристическим уравнением* и имеет три корня . Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:







Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами образует фундаментальную систему, общее решением системы записывается в виде:

,

,

.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти решение уравнения .

*Решение*:

Найдем решение соответствующего однородного уравнения

,

,

, .

Общее решение имеет вид .

Поскольку правая часть неоднородного уравнения представляет собой многочлен второй степени и , то частное решение  следует искать в полной форме многочлена второй степени ,

где *А*, *В*, *С* – неопределенные коэффициенты.

Подставив , ,  в уравнение получим тождество относительно *х*

,

.

Отсюда

,

,



Следовательно, имеем .

Общее решение исходного уравнения примет вид

.

***Задача 2***. Найти решение уравнения .

*Решение*:

Найдем решение соответствующего однородного уравнения

,

,

, .

Общее решение имеет вид .

Поскольку правая часть неоднородного уравнения представляет собой показательную функцию и , то частное решение  будем искать в подобном виде только с неопределенным коэффициентом .

Находим производные , 

,

.

Подставляем , ,  в исходное уравнение

,

, .

Следовательно, имеем .

Общее решение исходного уравнения примет вид

.

***Задача 3***. Найти общее решение уравнения .

*Решение*:

Найдем решение соответствующего однородного уравнения

,

,

.

Так как , , то общее решение имеет вид

.

Правая часть неоднородного уравнения представляет собой тригонометрический многочлен с разными аргументами у тригонометрических функций, поэтому частное решение  будем искать в полной форме двух тригонометрических многочленов .

Находим производные , 

,

.

Подставляем , ,  в исходное уравнение







Общее решение неоднородного уравнения примет вид

.

***Задача 4***. Решить систему дифференциальных уравнений:



*Решение*:

В данной системе  - неизвестные функции, а независимая переменная *t* – их аргумент.

Дифференцируем первое уравнение системы по *t*: .

Вместо  и  подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы. Получаем ,

откуда .

Полученное уравнение дифференцируем по t, а вместо  и  опять подставим выражения из тех же уравнений системы



,

.

Составим новую систему:



Система состоит из первого уравнения исходной системы и двух уравнений, полученных последовательным дифференцированием.

Из этой системы исключим неизвестные *y* и *z*. Для этого используем первые два уравнения системы. Первое уравнение, умножив на -6 и сложив со вторым, выразим у, затем первое уравнение умножив на -5 и сложив со вторым, выразим z:



Эти выражения подставим в третье уравнение системы:

.

После приведения подобных слагаемых получаем одно уравнение третьего порядка (однородное с постоянными коэффициентами) относительно неизвестной функции : .

Найдем корни характеристического уравнения

,

,

,



, , .

Следовательно, общее решение последнего уравнения имеет вид

.

Теперь надо получить значения для  и . Для этого находим  и 

,

.

Подставляем найденные значения для ,  и  в выражения для 2*у* и 4*z*:

,

,

;

,

,

.

Окончательно,



***Задача 5***. Решить систему  при данных начальных условиях , , .

*Решение*:

Сначала приводим систему к нормальному виду, т.е. к виду, разрешенному относительно производных





Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо  подставим выражение из второго уравнения новой системы



.

Составляем систему из  и :



из которой исключим у:

 .

Получено неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение 

имеет два корня , , следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид .

Правая часть неоднородного уравнения имеет вид

,

где , а  - не является корнем характеристического уравнения. Значит частное решение будет иметь вид .

Находим  и :

, .

Подставляем значения ,  и  в исходное дифференциальное уравнение

,

,

,



Отсюда .

Окончательно, .

Функцию  можно найти двумя способами.

1-й способ:

.

Подставляя сюда найденное значение  находим :

.

2-й способ:

Из первого уравнения нормальной системы имеем .

Учитывая, что

,

получим

,

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Найти решение уравнений: а) , б) .

***Задание 2***. Найти общее решение уравнений: а) , б) .

***Задание 3***. Решить системы дифференциальных уравнений:

а)  б) 

в)  г) 

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти решение уравнения .

***Задание 2***. Найти общее и частное решения уравнения , если , .

***Задание 3***. Найти общее решение уравнений: а) ,

б) , в) .

***Задание 4***. Решить системы дифференциальных уравнений:

а)  б)  в)  г) 

**Список рекомендуемой литературы**

***а) основная литература:***

1. Шершнев, В. Г. Математический анализ: учебное пособие / В. Г. Шершнев. – Москва: ИНФРА-М, 2019. – 288 с. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1008011
2. Шершнев, В. Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: учеб. пособие / В.Г. Шершнев. – Москва: ИНФРА-М, 2018. – 164 с. – URL: https://znanium.com/catalog/product/309284.

***б) дополнительная литература:***

1. Антипова, И. А. Математический анализ. Ч. I: учеб. пособие / И.А. Антипова, И.И. Вайнштейн, Т.В. Зыкова [и др.]. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2018. – 196 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1032137>
2. Антипова, И. А. Математический анализ. Ч. II: учеб. пособие / И.А. Антипова, И.И. Вайнштейн, Т.В. Зыкова [и др.]. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2018. – 188 с. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1032139