|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | |  | | --- | |  | | МИНОБРНАУКИ РОССИИ | | Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  высшего образования  **«МИРЭА – Российский технологический университет»**  **РТУ МИРЭА**  **Филиал РТУ МИРЭА в г. Ставрополе** | | |

**Методические указания к практическим занятиям**

**и самостоятельной работе по дисциплине**

**«Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для студентов**

**направления подготовки 08.03.01 Строительство**

**Ставрополь**

Методические указания составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования для студентов направления подготовки 08.03.01 Строительство и программой дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Составители: Л.А. Чекалова, доцент, канд. пед. наук

Е.В. Богушевич, доцент, канд. экон. наук

Оглавление

[Практическое занятие 1. Матрицы и определители 4](#_Toc58403136)

[Практическое занятие 2. Обратная матрица. Матричные уравнения 16](#_Toc58403137)

[Практическое занятие 3. Ранг матрицы 22](#_Toc58403138)

[Практическое занятие 4. Системы линейных уравнений 26](#_Toc58403139)

[Практическое занятие 5. Решение систем линейных однородных уравнений 35](#_Toc58403140)

[Практическое занятие 6. Линейные операции над векторами 40](#_Toc58403141)

[Практическое занятие 7. Нелинейные операции над векторами 46](#_Toc58403142)

[Практическое занятие 8. Базис векторного пространства. Линейные подпространства 55](#_Toc58403143)

[Практическое занятие 9. Линии на плоскости 83](#_Toc58403144)

[Практическое занятие 10. Уравнения прямой на плоскости 88](#_Toc58403145)

[Практическое занятие 11. Линии в пространстве. Уравнение плоскости 98](#_Toc58403146)

[Практическое занятие 12. Уравнение плоскости 103](#_Toc58403147)

[Практическое занятие 14. Прямая и плоскость в пространстве 118](#_Toc58403148)

[Практическое занятие 15. Многомерная геометрия кривых и поверхностей: уравнения кривых 122](#_Toc58403149)

[Практическое занятие 16. Многомерная геометрия кривых и поверхностей: уравнения поверхностей 129](#_Toc58403150)

[Список рекомендуемой литературы 134](#_Toc58403151)

# Практическое занятие 1. Матрицы и определители

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде



или сокращенно , где  - номер строки,  - номер столбца.

Матрицу А называют матрицей размера  и пишут .

Матрица размера  называется *квадратной*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором*.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированной* к данной и обозначают .

***Действия над матрицами***

1. *Сложение*. Операция сложения вводится для матриц одинакового размера.

Суммой двух матриц А и В называется матрица С, получаемая сложением соответствующих элементов матриц А и В. Т.е. .

2. *Разность* матриц определяется аналогично сложению.

3. *Умножение на число*. Произведением матрицы А на число k называется матрица В, полученная путем увеличения каждого элемента матрицы А в k раз. Т.е. .

4. *Произведение матриц*. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы А на матрицу В называется матрица С такая, что элемент *i*-й строки и k-го столбца матрицы В равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы А на соответствующие элементы k-го столбца матрицы В. Т.е. , где 

Матрицы А и В называются *коммутирующими* (*перестановочными*), если выполняется условие .

*Элементарные преобразования матриц:*

1) умножение любого ряда на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов другого ряда;

3) перестановка местами двух параллельных рядов;

4) вычеркивание (удаление) одного из одинаковых рядов;

5) транспонирование.

***Определители***

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число  (или , или ), называемое *определителем*.

Определитель матрицы А также называют ее *детерминантом*.

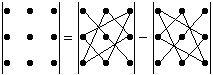
Определитель второго порядка задается равенством

.

Это равенство можно представить в виде схемы:



Определитель третьего порядка вычисляется с помощью правила треугольников (правило Саррюса):



Согласно представленной схеме определитель третьего порядка задается равенством:

.

Правило Саррюса имеет еще и другой вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | или |  |

*Минором* **** некоторого элемента ****определителя n-го порядка, называется определитель порядка (n–1)–го порядка, полученный из данного путем вычеркивания *i*–й строки и *j*–го столбца.

*Алгебраическим дополнением* ****элемента ****определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма  - четное число, и со знаком «–», если эта сумма нечетная, т.е. ****

*Разложение определителя по элементам некоторого ряда*. Определитель равен сумме произведений некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например, разложение определителя третьего порядка по элемента первой строки будет иметь вид:

.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти линейную комбинацию матриц 2А+3В, где

, 

*Решение*:



.

***Задача* 2.** Пусть  Найти произведения АВ и ВА (если это возможно).

*Решение*:



1-я строка матрицы А прикладывается к первому столбцу матрицы В,

соответствующие элементы перемножаются, а произведения складываются. Повторяем это действие относительно всех столбцов. Затем переходим ко второй строке и последовательно умножаем ее на каждый столбец.

.

***Задача* 3**. Найти значение матричного многочлена , если



*Решение*:



,

,

,

.

Тогда



***Задача* 4**. Транспонировать матрицу 

*Решение*:

Так как у матрицы А две строки и три столбца, то у матрицы  будет три строки и два столбца: .

***Задача* 5**. Матрицу А с помощью элементарных преобразований над строками привести к ступенчатому виду:



*Решение:*

Данная матрица будет ступенчатой, если под первым элементом первой строки, под вторым элементом второй строки и под третьим элементом третей строки все элементы будут нули.

Итак, ступенчатая матрица будет иметь вид:

.

***Задача* 6**. Привести к ступенчатому виду матрицы:

а) . б) .

*Решение*:

а) 

- ступенчатая матрица.

б) 

 - ступенчатая матрица.

***Задача* 7**. Вычислить определитель второго порядка .

*Решение*:



***Задача* 8**. Вычислить определитель третьего порядка:



*Решение*:

Вычисляя определитель разложением по первой строке, получим:





.

***Задача* 9**. Вычислить определитель по правилу треугольника



*Решение*:



.

***Задача* 10**. Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или столбцу:



*Решение*:

Удобнее всего вычислять определитель разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по второй строке:

.

***Задача* 11**. Доказать равенство, используя свойства определителя:



*Решение*:

Так как третий столбец левого определителя можно представить в виде суммы трех столбцов, этот определитель можно представить в виде суммы трех определителей:



Третий столбец во втором определители пропорционален первому столбцу, а в третьем определителе – второму столбцу, следовательно, оба этих определителя равны нулю. Что и завершает доказательство.

***Задача* 12**. Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:



*Решение*:

Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:



.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1.1.*** Найти линейные комбинации заданных матриц:

б) : , .

***Задание 1.2.*** Найти значение матричного многочлена :

а) , ,

б) , ,

***Задание 1.3.*** Проверить, коммутируют ли матрицы А и В:

а) , ,

б) , ,

***Задание 1.4.*** Транспонировать данные матрицы:

а) , б) .

***Задание 1.5.*** Вычислить произведения  и  при заданной матрице А:

а) , б) .

***Задание 1.6.*** Привести к ступенчатому виду матрицу .

***Задание 1.7.*** Вычислить определители второго порядка:

а) , б) , в) .

***Задание 1.8.*** Решить уравнения:

а) , б) 

***Задание 1.9.*** Решить уравнения и неравенства:

а) , б) ,

***Задание 1.10.*** Доказать равенство .

***Задание 1.11.*** Вычислить, используя свойства определителей:

а) , б) ,

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 1.1.*** Найти произведения матриц АВ и ВА (если они существуют): | , | , | , |
| ***Задание 1.2.*** Привести к ступенчатому виду матрицы: |  |  |  |
| ***Задание 1.3.*** Вычислить определители третьего порядка: |  |  |  |
| ***Задание 1.4.*** Вычислить определители с помощью «правила треугольников»: |  |  |  |
| ***Задание 1.5.*** Вычислить определитель 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу: |  |  |  |
| ***Задание 1.6.*** Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу: |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Что такое матрица, какие виды матриц вы знаете?
2. Какие операции можно производить над матрицами?
3. Как сложить две матрицы и любые ли матрицы можно складывать?
4. Как умножить матрицу на число?
5. Что называется произведением двух матриц? Когда существует произведение матриц?
6. Как вычислить определитель второго порядка?
7. Сформулируйте правила вычисления определителей третьего порядка.
8. Что называется минором некоторого элемента определителя?
9. Запишите формулу алгебраического дополнения элемента *aij* определителя?
10. Перечислите свойства определителя.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Способы применения математического пакета MathCAD в технических расчетах
2. Простейшие операции с матрицами в математическом пакете MathCAD

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1.1.*** Найти линейные комбинации заданных матриц:

а) : ,

б) : , .

***Задание 1.2.*** Найти произведения матриц АВ и ВА (если они существуют):

а , ,

б) , ,

***Задание 1.3.*** Найти значение матричного многочлена :

а) , ,

б) , 

***Задание 1.4.*** Проверить, коммутируют ли матрицы А и В:

а) , ,

б) , .

***Задание 1.5.*** Транспонировать матрицу:

а).

***Задание 1.6.*** Вычислить произведения  и  при заданной матрице А:

а) .

***Задание 1.7.*** Привести к ступенчатому виду матрицы:

а), б) ,

***Задание 1.8.*** Вычислить определители второго порядка:

а), б) , в) .

***Задание 1.9.*** Решить уравнения:

а) , б) , в) .

***Задание 1.10.*** Вычислить определители третьего порядка:

а) , б) , в) ,

***Задание 1.11.*** Вычислить определитель 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

а) , б) .

***Задание 1.12.*** Решить уравнения и неравенства:

а) , б) .

***Задание 1.13.*** Доказать равенство:

а) .

***Задание 1.14.*** Вычислить, используя свойства определителей:

а) .

***Задание 1.15.*** Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

а) , в) ,

г) .

# Практическое занятие 2. Обратная матрица. Матричные уравнения

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Обратная матрица***

Матрица  называется *обратной* матрице А, если выполняется условие .

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, в обратном случае матрица называется *вырожденной*.

Матрицей союзной к матрице А, называется матрица



где - алгебраическое дополнение элемента  данной матрицы А.

*Теорема*. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

.

*Методы нахождения обратной матрицы*

1. Метод присоединенной матрицы состоит в применении формулы: .

2. Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) состоит в следующем:

, т.е.

к матрице А приписываем слева единичную матрицу такого же размера, получим прямоугольную матрицу Г. С помощью элементарных преобразований над строками в матрице Г слева от черты получаем единичную матрицу. Матрица, полученная справа от черты будет единичной матрицей.

***Матричные уравнения***

*Матричными* называются уравнения вида

, , ,

где А, В, С, Х – матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если Матрицы А и С невырожденные, то решение уравнений соответственно будут записываться

, , 

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача* 1**. Найти (методом присоединения матрицы) матрицу, обратную к данной:



*Решение*:

1) Найдем :

.

Так как  то матрица  существует.

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы А:

3) Запишем матрицу .

4) Найдем матрицу 



5) Сделаем проверку:

,

.

***Задача* 2**. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

.

*Решение*:

Запишем матрицу  и с помощью элементарных преобразований слева от черты получим единичную матрицу:





Итак .

Сделаем проверку:

.

***Задача* 3**. Решить матричное уравнение:



*Решение*:

Запишем данное матричное уравнение в виде . Его решением является матрица  (если существует матрица ).

1) Найдем :

.

Следовательно обратная матрица  существует, и уравнение имеет единственное решение.

2) Найдем обратную матрицу:

Итак, .

Следовательно, .

3) Найдем матрицу Х:

.

***Задача* 4**. Решить матричное уравнение:



*Решение*:

Запишем данное матричное уравнение в виде . Его решением является матрица  (если матрицы  и  существуют).

1) Найдем определители матриц А и С:

,



Матрицы А и С невырождены, значит, существуют обратные матрицы  и , и исходное уравнение имеет единственное решение.

2) Найдем обратные матрицы  и :

 и .

Тогда,

,

.

3) Найдем Матрицу Х:

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 2.1.*** Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

а) , б) , в) ,

***Задание 2.2.*** Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

а) , б) ,

***Задание 2.3.*** Решить матричные уравнения:

а) , б) ,

в) , г) ,

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение невырожденной матрицы.
2. Какая матрица называется обратной?
3. Перечислите методы нахождения обратной матрицы.
4. Сформулируйте алгоритмы вычисления обратной матрицы.
5. Сформулируйте правило решения матричных уравнений.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Матричные функции в математическом пакете MathCAD.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 2.1.*** Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

а) , б)  в) ,

г) .

***Задание 2.2.*** Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

а) , б) ,

в) , г) .

***Задание 2.3.*** Решить матричные уравнения:

а) , б) ,

в) , г) .

# Практическое занятие 3. Ранг матрицы

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Рангом* матрицы Аназывается ее минор наивысшего порядка отличный от нуля.

Ранг матрицы А обозначается , или .

Минор порядок, которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

*Методы вычисления ранга матрицы:*

1. *Метод элементарных преобразований* заключается в том, что матрицу приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы А.
2. *Метод окаймляющих миноров* состоит в следующем:

а) Найти какой-нибудь минор  первого порядка, т.е. ненулевой элемент матрицы. Если такого минора нет, то матрица нулевая и .

б) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие  (окаймляющие ) до тех пор, пока не найдется минор , отличный от нуля. Если такого минора нет, то , если есть то  и т.д.

…

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то , если есть хотя бы один такой минор , то , и процесс продолжается.

На каждом шаге достаточно найти всего один ненулевой минор.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача* 1.** Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:



*Решение*:

Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

 - ступенчатая матрица.

В полученной ступенчатой матрице 2 ненулевые строки, следовательно ее ранг равен 2. Тогда ранг исходной матрицы .

***Задача* 2**. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:



*Решение*:

Так как у матрицы А есть нулевые элементы, то .

Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка. Таким минором является, например,  Значит 

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие :

,

.

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие , равны нулю, следовательно r(А)<3. Итак .

Одним из базисных миноров является .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 3.1.*** Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) , б) ,

***Задание 3.2.*** Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

а) , б) ,

***Задание 3.3. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра :***

а) .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение ранга матрицы.
2. Какой минор называется базисным?
3. Перечислите свойства ранга.
4. Назовите методы вычисления ранга матрицы.
5. В чем заключается метод элементарных преобразований.
6. В чем состоит метод окаймляющих миноров.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 3.1.*** Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) , б) ,

в) , г) .

***Задание 3.2.*** Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

а) , б) ,

в) , г) .

***Задание 3.3.*** Найти ранг матрицы при различных значениях параметра ***:***

а).

# Практическое занятие 4. Системы линейных уравнений

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)***

*Системой линейных алгебраических уравнений*, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида



где числа , ,  называются коэффициентами системы, числа  - свободными членами. Подлежат нахождению числа .

*Расширенной матрицей системы* называется матрица  системы, дополненная столбцом свободных членов



*Теорема Кронекера-Капелли***.** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: .

*Формулы Крамера***.** Если в системе число уравнений соответствует числу неизвестных, то ее решение можно найти по формулам:

, ,

где  - основной определитель системы,  - определитель полученный из основного, заменой -го столбца на столбец свободных членов.

*Метод Гаусса* состоит в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последнего (по номеру переменных), находят все остальные переменные.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача* 1**. Исследовать систему линейных уравнений, если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:



*Решение*:

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:



Ранг матрицы системы равен рангу расширенной системы:



значит, система совместна. Количество неизвестных также равно 2:



значит, система определена, т.е. имеет единственное решение.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:



Из второго уравнения находим, что ; подставляя это значение в первое уравнение, получим . Итак, получили общее и оно же единственное частное решение системы: (2:3).

*Ответ:* система совместна и определена; общее решение (2;3); частное решение (2;3).

***Задача* 2**. Исследовать систему линейных уравнений, если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:



*Решение*:

Приведем к расширенному виду матрицу системы:

.

Так как



то система совместна и неопределенна (т.е. имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно , количество свободных переменных равно .

Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы А, например,

.

Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы А соответствуют переменным  и  - -это будут главные переменные, а  - свободная переменная.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:



Слева оставим только главные переменные, а остальные перенесем в правую часть уравнений:



Подставляя выражение для  в первое уравнение, получим



Обозначая свободную переменную  через *t*, получим общее решение системы



Частное решение системы получим, например, при :



*Ответ*: система совместна и неопределенна; общее решение ; частное решение .

***Задача* 3.** Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:



*Решение*:

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

.

Так как , то решение системы существует и оно единственно.

Найдем определитель , подставляя в определителе  вместо первого столбца  столбец свободных членов 

.

Определитель  получается из  подстановкой столбца свободных членов  вместо второго столбца :

.

Отсюда получим решение системы уравнений:

*Ответ*: (2;3).

б) Решим систему с помощью обратной матрицы.

Представим данную систему уравнений в виде матричного уравнения , где

, , .

Найдем матрицу , методом присоединенной матрицы:

Так как , то матрица  существует, поэтому решение системы существует и единственно.

Найдем алгебраические дополнения к элментам матрицы А:

Составим союзную матрицу :

.

Тогда матрица  будет равна:

.

Найдем решение системы уравнений:

.

*Ответ*: (2;3).

***Задача* 4**. Решить систему уравнений по формулам Крамера с помощью обратной матрицы:



*Решение*:

а) Решим систему по формулам Крамера. Для этого найдем определитель матрицы системы:

.

Так как , то решение системы существует и единственно.

Найдем определители , ,  подставляя столбец свободных членов  вместо первого, второго и третьего столбцов определителя  соответственно:

.

.

.

Отсюда получим решение системы уравнений:

, , .

*Ответ*: .

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу , обратную к матрице системы .



Найдем решение системы уравнений:

.

Итак,  (как и при решении по формулам Крамера)

***Задача* 5.** Решить систему уравнений по формулам Крамера с помощью обратной матрицы:



*Решение*:

Найдем определитель матрицы системы:

.

Так как , то система не может быть решена ни по формулам Крамера, ни с помощью обратной матрицы. При этом система является совместной (например, есть решение(1;1;1)) и неопределенной.

*Ответ*: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы систему решить нельзя.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 4.1.*** Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения:

а)  б) 

в)  г) 

д)  е) 

ж)  з) 

***Задание 4.2.*** Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу и по формулам Крамера. Указать те значения параметров, при которых указанными методами систему решить невозможно:

а)  б) 

в)  г) 

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 4.1.*** Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения: |  |  |  |
| ***Задание 4.2.*** Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу и по формулам Крамера. Указать те значения параметров, при которых указанными методами систему решить невозможно: |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Что называется решением системы линейных уравнений?
2. Какая система называется совместной? несовместной?
3. Какая система называется определенной? неопределенной?
4. Сформулируйте алгоритм решения произвольной системы уравнений.
5. Как решить систему по формулам Крамера?
6. В чем состоит метод Гаусса?
7. Как решить систему матричным способом?
8. Что называется фундаментальной системой решений СЛАУ?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 4.1.*** Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решения:

а)  б) 

в)  г) 

д)  е) 

ж)  з) 

***Задание 4.2.*** Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу по формулам Крамера. Указать те значения параметров, при которых указанными методами систему решить невозможно:

а)  б) 

г)  е) 

# Практическое занятие 5. Решение систем линейных однородных уравнений

1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений



*Решение*:

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:



Так как столбец свободных членов при всех элементарных преобразованиях не изменяется, его можно не писать и ограничиться матрицей системы А:



Однородная система совместна всегда. Количество переменных :



Значит, система определена, т.е. имеет единственное решение.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице :



Из второго уравнения получим . Подставляя это значение в первое уравнение, получим .

*Ответ*: общее решение .

***Задача 2***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:



*Решение*:

Запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:



Так как  то система неопределенна. Количество главных переменных равно , количество свободных переменных равно . Для определения главных переменных выберем какой-нибудь минор 2-го порядка отличный от нуля полученной матрицы А, например, минор . Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы А – соответствуют переменным  - это будут главные переменные, а  - свободная переменная. Заметим, что в качестве главных переменных нельзя выбрать пару  и , так как соответствующий минор равен нулю: 

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:



Из второго уравнения, выражая  через , получим  подставляя это выражение в первое уравнение, получим 

Обозначив свободную переменную через *t*, получим общее решение системы:  Фундаментальную систему решений образует, например, решение .

Ответ: общее решение системы ; фундаментальная система решений .

***Задача 3***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:



*Решение*:

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:



Так как  то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать  соответствующие столбцам ненулевого минора второго порядка: ;

в качестве свободных переменных - .

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:



Из второго уравнения, выражая  через  и , получим



Подставляя второе выражение в первое уравнение, получим



Обозначая свободные переменные  и , запишем общее решение системы:



Фундаментальную систему решений образует, например, пара решений  и .

*Ответ*: общее решение системы ; фундаментальная система решений .

***Задача 4***. Найти какие-либо фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений:



*Решение*:

Составим матрицу коэффициентов при неизвестных и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:





. Угловой минор 3-го порядка не равен нулю, следовательно, можно положить  - основными переменными, а  - свободными.

Из полученной матрицы следует решение системы в виде:



Это решение удобно записать в виде:



Обозначим свободные переменные  и , тогда общее решение однородной системы уравнений перепишем:

.

Два столбца элементов  и  есть фундаментальные решения системы уравнений. Они образуют фундаментальный набор решений. Столбцы фундаментального набора линейно независимы. Любое решение однородной системы есть линейная комбинация фундаментального набора решений.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 5.1***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 5.2***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Даете определение однородной системы уравнений?
2. Какое решение называютфундаментальным решением системы?
3. Какое решение системы называют тривиальным?
4. Перечислите методы решения однородной системы уравнений.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования ненулевых решений однородной системы уравнений.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 5.1***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 5.2***. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

# Практическое занятие 6. Линейные операции над векторами

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Вектором* называется направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок имеющий определенную длину и определенное направление.

*Длиной* **(***модулем***)** вектора называется длина отрезка и обозначается: .

Вектор длина которого равна нулю называется *нулевым* и обозначается . Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор длина которого равна единице называется *единичным* и обозначается через . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора , называется ортом вектора  и обозначается .

Векторы  и  называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых; записывают . Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

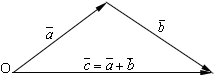
Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

***Линейные операции над векторами***

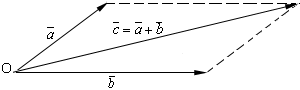
Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения, вычитания и умножение вектора на число.

1) *Сумма векторов*. Пусть  и  - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку О и построим вектор  и от его конца отложим вектор . Соединим начало вектора  с концом вектора . Получим вектор :

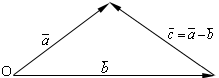


Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма*:



2) Под *разностью* векторов  и  понимается вектор , такой, что 



3) *Произведением вектора  на скаляр * называется вектор , который имеет длину , коллинеарен вектору , имеет тоже направление, что и вектор , если  и противоположное направление, если .

***Проекция вектора на ось***

Проекция вектора ** на ось  равна произведению модуля вектора  на косинус угла  между вектором и осью, т.е.

.

***Разложение вектора по ортам координатных осей***

Обозначим проекции вектора  на оси Ох, Оy, Оz соответственно через , , . Разложение вектора  по ортам координатных осей имеет вид:

.

Числа , ,  называются координатами вектора .

Векторное равенство можно записать в виде:

.

***Модуль вектора***

Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат:

.

***Направляющие косинусы***

Пусть углы вектора  с осями Ох, Оу, Оz соответственно равны , , . По свойству проекции вектора на ось имеем

, , ,

или

, , ,

Числа , ,  называются направляющими косинусами вектора .

Сумма квадратов направляющих косуинусов ненулевого вектора равна единице:

.

***Действия над векторами, заданными проекциями***

Пусть даны векторы  и .

1. *Линейные операции над векторами*.

а) , т.е. при сложении (вычитании) вектора их одноименные координаты складываются (вычитаются).

б) , т.е при умножении вектора на число координаты вектор умножаются на это число.

2. *Равенство векторов*.



3. *Коллинеарность векторов*.

Так как , то можно записать , где - скаляр.

Проекции коллинераных векторов пропорциональны, т.е.



Здесь верно и обратное утверждение.

4. *Координаты вектора*.

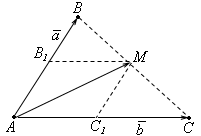
Если  и , тогда

,

т.е. координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. В треугольнике АВС дано: , , точка M – середина стороны BC. Выразить вектор  через векторы  и .



*Решение*:

Через точку М проведем прямые, параллельные сторонам *АВ* и *АС*. Получим параллелограмм , в котором *АМ* является диагональю.

Следовательно, .

, 

( и  - средние линии, поэтому , ).

Получаем , т.е. .

***Задача 2***. Даны две точки  и . Найти координаты и модуль вектора .

*Решение*:

Координаты вектора находим по формуле:

.

Тогда

.

Модуль вектора определяем по формуле:



Поэтому

.

***Задача 3***. Даны три последовательные вершины параллелограмма: , , . Найти его четвертую вершину *D*.

*Решение*:

Обозначим координаты вершины D через , т.е. . Так как АВСD – параллелограмм, то имеем:

.

Находим координаты векторов  и :

, .

Из равенства векторов  и  следует, что:

 ⇒ 

Итак, .

***Задача 4***. Вектор  составляет с осями *Ох* и *Оу* углы  и . Найти его координаты, если .

*Решение*:

Пусть  - координаты вектора , т.е. .

*1-й способ*. Координаты вектора  найдем из соотношений







Найдем  из соотношения:

.

 ⇒ , .

Отсюда  и .

Значит, условию задачи удовлетворяют два вектора:

 и .

*2-й способ*. Значение координаты z можно найти из формулы:







 и .

*Ответ*:  и .

***Задача 5***. При каких значениях  и  векторы  и  коллинеарны?

*Решение*:

Так как , то . Отсюда получаем, что

, .

***Задача 6***. Разложить вектор  по векторам  и .

*Решение*:

Необходимо вектор  представить в виде:

,

где  - числа.

Перепишем векторы  в разложении по ортам координатных осей:

, , .

Подставим векторы  в выражение :









т.е. , . Следовательно, .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 6.1***. Найти координаты вектора , если  и углы между вектором и координатными осями равны: .

***Задание 6.2***. Даны векторы , , . При каком значении коэффициента α векторы  и  коллинеарны?

***Задание 6.3***. Представить вектор  как линейную комбинацию векторов , , .

***Задание 6.4***. На оси *Ох* найти точку *М*, расстояние которой от точки  равно 5.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте понятие вектора.
2. Дайте определение модуля вектора.
3. Перечислите линейные операции над векторами.
4. Дайте определение направляющих косинусов вектора.
5. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
6. Дайте определения угла между векторами и угла между вектором и осью.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 6.1***. Луч образует с двумя осями координат углы в 60°. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

***Задание 6.2***. Даны точки , , , . Проверить коллинеарность векторов  и ; установить какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или в разные?

***Задание 6.3***. На оси *Оу* найти точку *М*, равноудаленную от точек  и .

***Задание 6.4***. Даны вершины треугольника , , . Найти длину медианы, проведенной из вершины *А*.

# Практическое занятие 7. Нелинейные операции над векторами

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Скалярное произведение векторов.***

*Скалярным произведением*векторов  и  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается ,  или . Итак по определению:

, где .

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором, т.е.

.

*Выражение скалярного произведения через координаты*

Пусть даны векторы  и , тогда

,

т.е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

*Некоторые приложения скалярного произведения:*

1) *Угол между векторами*

.

Отсюда следует условие перпендикулярности векторов:

.

2) *Проекция вектора на заданное направление*

, .

3) *Работа постоянной силы*

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

, т.е. .

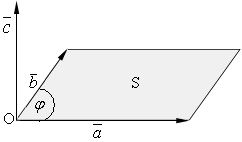
***Векторное произведение векторов***

*Векторным произведением*векторов  и  называется вектор , удовлетворяющий следующим условиям:

1) перпендикулярен векторам  и , т.е  и 

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах  и  как на сторонах, т.е.

, где 

****

3) векторы , ,  образуют правую тройку векторов.

Обозначается:  или .

*Выражение векторного произведения через координаты*

Пусть даны векторы  и , тогда

.

*Некоторые приложения векторного произведения:*

1) *Установление коллинеарности векторов*

Если , то , т.е.

.

2) *Нахождение площади параллелограмма и треугольника*

Геометрический смысл векторного произведения состоит в том, что модуль векторного произведения двух векторов  и  равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах, т.е.



Тогда площадь треугольника равна:

.

***Смешанное произведение векторов***

Произведение векторов ,  и , составленное таким образом, что первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор, т.е , называется векторно-скалярным или смешанным произведением трех векторов, и обозначается .

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах и взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

*Выражение смешанного произведения через координаты*

Пусть даны векторы ,  и , тогда

.

*Некоторые приложения смешанного произведения:*

1) *Определение взаимной ориентации векторов в пространстве*

Если , то векторы , ,  образуют правую тройку, а если , то векторы , ,  образуют левую тройку.

2) *Установление компланарности векторов*

 векторы , ,  - компланарны.

3) *Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды*

Объем параллелепипеда, построенного на векторах , ,  вычисляется как

.

А объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен:

.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Векторы  и  образуют угол . Зная, что , , вычислить .

*Решение*:

Согласно свойствам скалярного произведения





.

***Задача 2***. Даны вершины треугольника , , . Найти: а) внутренний угол при вершине С; б) .

*Решение*:

а) Угол ϕ при вершине С есть угол между векторами  и . Найдем координаты этих векторов:

, 

Далее вычислим их модули

,

.

Угол между векторами найдем согласно формуле:

,

.

б) Согласно формуле

.

***Задача 3***. Найти длину вектора , если , , .

*Решение*:





***Задача 4***. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин , , ,  взаимно перпендикулярны.

*Решение*:

Составим вектора  и , лежащие на диагонали данного четырехугольника.

, .

Найдем скалярное произведение этих векторов:

.

Отсюда следует, что . Диагонали четырехугольника *ABCD* взаимно перпендикулярны.

***Задача 5***. Вычислить работу, произведенную силой , если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения  в положение . Под каким углом к *АВ* направлена сила ?

*Решение*:

Находим . Тогда

 (ед. работы).

Угол между  и  находим по формуле :

, .

***Задача 6***. Даны векторы  и , для которых , , . Найти: а) ; б) .

*Решение*:

а) По формуле модуля векторного произведения получим:

,

т.е. , где  - единичный вектор направления .

б) Согласно свойствам векторного произведения получаем:



Следовательно,

.

***Задача 7***. Найти площадь треугольника с вершинами , , .

*Решение*:

Площадь S треугольника АВС равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  и , т.е. .

Координаты векторов и  равны:

, .

Тогда

, или .

Отсюда .

Следовательно,

.

***Задача 8***. Сила  приложена к точке . Определить момент этой силы относительно точки .

*Решение*:

Момент силы  относительно точки А есть вектор

.

Найдем координаты вектора :

.

Тогда

, т.е. .

***Задача 9***. Доказать, что четыре точки , , ,  лежат в одной плоскости.

*Решение*:

Достаточно показать, что три вектора , , , имеющие начало в одной из данных точке, лежат в одной плоскости (т.е. компланарны). Находим координаты векторов , , :







Проверяем условие компланарности векторов:

.

Итак, векторы , ,  - компланарны, значит точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.:

***Задача 10***. Вершинами пирамиды служат точки , ,  и . Найти объем пирамиды.

*Решение*:

Находим векторы :

, , .

Находим :

.

Следовательно, .

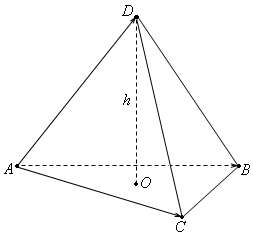
***Задача 11***. Даны вершины пирамиды , , , . Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань АВС.

*Решение*:

Так как, объем V пирамиды вычисляется по формуле

, то ,

где  - высота пирамиды,  - площадь основания.



Найдем объем пирамиды по формуле

,

где , , .

Тогда

.

Находим площадь основания

.

Следовательно, .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 7.1***. Найти модуль вектора , если ,  .

***Задание 7.2***. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  и .

***Задание 7.3***. Даны векторы , , . Найти .

***Задание 7.4***. Даны векторы , . Найти: а) ; б) .

***Задание 7.5***. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  и .

***Задание 7.6***. При каком значении λ векторы , ,  компланарны?

***Задание 7.7***. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах , , , опущенную на грань, построенную на векторах  и .

***Задание 7.8***. Даны вектора , , . Найти .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение скалярного произведения векторов. Перечислите свойства скалярного произведения векторов.
2. Приведите примеры применения скалярного произведения векторов.
3. Дайте определение векторного произведения векторов. Перечислите свойства векторного произведения векторов.
4. Приведите примеры применения векторного произведения векторов.
5. Дайте определение смешанного произведения векторов. Перечислите свойства смешанного произведения векторов.
6. Приведите примеры применения смешанного произведения векторов.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 7.1***. Найти модуль вектора , если ,  .

***Задание 7.2***. Найти вектор , зная что , ,если  и , проекция вектора  на вектор  равна 1.

***Задание 7.3***. Найти координаты вектора , если , .

***Задание 7.4***. Найти площадь треугольника построенного на векторах  и .

***Задание 7.5***. Векторы  и  образуют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  и , если .

***Задание 7.6***. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах , , .

векторах  и .

***Задание 7.7***. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах , , .

# Практическое занятие 8. Базис векторного пространства. Линейные подпространства

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Множество *W* элементов  называется линейным пространством, если по некоторому правилу:

1) любым двум элементам *х* и *y* из *W* поставлен в соответствие элемент из *W*, обозначаемый  и называемый суммой элементов *х* и *y*;

2) любому элементу *х* из *W* и каждому числу λ поставлен в соответствие элемент из *W*, обозначаемый  и называемый произведением числа λ на элемент *х*, причем справедливы следующие соотношения:

1) 

2) 

3) 

4) 

5)

6) 

7) существует нулевой элемент 0 такой, что  для любого 

8) для каждого элемента *х* существует противоположный элемент *-х* такой, что .

*Размерность векторного пространства*

Векторное пространство называется *n*-мерным, если среди множества его векторов найдутся *n* линейно независимых векторов, а любые  векторов окажутся зависимыми. Число *n* называется *размерностью* *векторного* *пространства*.

*Базис векторного пространства*

Упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов *n*-мерного векторного пространства называется *базисом* этого пространства.

Пусть в *n*-мерном векторном пространстве содержится *m* векторов . Количество способов выбора *n* линейно независимых векторов из общего числа *m* не превышает величины

.

Выбрав *n* векторов, можно построить  упорядоченных совокупностей. Тогда количество базисов в таком в *n*-мерном векторном пространстве может достигать величины

.

Если в векторном пространстве определен базис, другие векторы могут быть выражены через этот базис.

*Разложение вектора по базису*

*Теорема*. Каждый вектор линейного пространства можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

Пусть векторы  образуют базис, а *х* – произвольный вектор. Тогда совокупность векторов  линейно зависима.

Разложение вектора *х* по базису  будет иметь вид

,

где числа  - координаты вектора *х* в этом базисе.

Таким образом, упорядоченная совокупность  действительных чисел – есть набор координат в определенном базисе некоторого *n*-мерного вектора.

*Матрица перехода к новому базису*

Пусть  и  - старый и новый базисы линейного *n-*мерного векторного пространства W. Каждый из векторов нового базиса можно выразить через векторы старого базиса:



а также представить в матричной форме:

.

или в сокращенной матричной форме:



Матрица



называется матрицей перехода от старого базиса *е* к новому базису .

***Линейные подпространства***

Из множества векторов линейного подпространства *W* выберем некоторую совокупность векторов и обозначим ее *V*.

Пусть для любых векторов *х* и *у* из *V* и любого числа  выполняются следующие условия:

1) ,

2).

Тогда множество векторов *V* называется *линейным подпространством* пространства *W*.

*Сумма и пересечение линейных подпространств*

*Суммой*  линейных подпространств  линейного пространства W называется совокупность всех векторов , которые можно представить в виде (разложить)

, где .

Если для каждого вектора *а* это разложение единственное, сумма линейных подпространств  называется прямой и записывается в виде

.

*Пересечением*  линейных подпространств  линейного пространства W называется совокупность всех векторов *b*, которые принадлежат одновременно подпространствам . На рис. Пересечению подпространств  геометрического пространства  принадлежат векторы .

*Свойства суммы и пересечения линейных подпространств*

1) сумма и пересечение линейных подпространств являются линейными подпространствами.

2) Размерность суммы линейных подпространств равна сумме размерностей подпространств минус размерность их пересечения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Являются ли векторы , ,  линейно независимыми? Если да, найти связь между векторами.

*Решение*:

Составим матрицу из координат векторов, расположив их в виде строк, и найдем ее ранг

.

Из трех строк, только две являются линейно независимыми. Третья есть линейная комбинация первых двух. Следовательно, векторы линейно зависимы. Найдем их линейную комбинацию. Рассмотрим уравнение

.

Так как данные векторы линейно зависимы, то среди чисел  существуют отличные от нуля. Запишем уравнение в матричном виде



Решим систему методом Гаусса, преобразуем матрицу коэффициентов при неизвестных к треугольному виду:

.

Откуда следует

, т.е. , где .

Связь между векторами можно записать, положив . Тогда

.

***Задача 2***. Пусть в некотором старом базисе заданы векторы , , , . Показать, что векторы  составляют новый базис. Разложить вектор  поэтому базису.

*Решение*:

Векторы  могут составить базис в трехмерном векторном пространстве, если они линейно независимы. Составляем из координат этих векторов матрицу и находим ее ранг



.

Ранг матрицы равен трем, следовательно, векторы  линейно независимы.

Пусть вектор  имеет координаты  в новом базисе, составленном из векторов . Тогда

.

Найдем переменные  методом Гаусса, используя расширенную матрицу



Запишем систему уравнений и решим ее

.

Отсюда .

***Задача 3***. Используя векторы , , построить ортонормированный базис в трехмерном пространстве.

*Решение*:

Векторы  взаимно ортогональны, т.к. . Нормируя векторы , найдем векторы :

, 

, .

Третий вектор  должен быть ортогонален векторам . Поэтому

 и .

Запишем эти уравнения в координатах

.

Решая систему, получим , где .

Подбором коэффициента t среди бесконечного множества векторов  найдем тот, длина которого равна 1. Это вектор .

Легко проверить, что тройка векторов  образует ортонормированный базис в трехмерном векторном пространстве.

***Задача 4****.* Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис по заданному базису , 

*Решение*:

Пронормируем вектор , в результате чего получим единичный вектор :

, тогда .

Варьируя коэффициент λ, зададим новый вектор  так, чтобы он был ортогонален вектору . Значение λ найдем из соотношения

, т.е.







.

Следовательно, вектор  имеет координаты:

.

Это вектор не требует нормировки, т.к. уже сам является единичным . Таким образом, ортонормированный базис имеет вид

, .

***Задача 5.*** Найти матрицу перехода от старого базиса векторов  к новому базису .

*Решение*:

Векторы  создают базис в двухмерном пространстве. Это означает, что любой третий вектор, например  или , есть линейная комбинация векторов этого базиса, и он может быть разложен по векторам базиса. Тогда



В матричном виде



Матрица Т, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе, есть по определению матрица перехода от старого базиса к новому, т.е.

.

***Задача 6.***  Найти координаты двумерного вектора в новом базисе, зная его координаты в старом базисе.

*Решение*:

Пусть вектор  имеет в старом базисе координаты , в новом базисе . Тогда

.

Векторы , в свою очередь, могут быть разложены по векторам старого базиса:



Подставим полученные разложения в предыдущую формулу. Получим

.

Перенесем все слагаемые влево, раскроем скобки и сгруппируем слагаемые с сомножителями  и . Получим

.

Линейна комбинация из векторов старого базиса равна нулю только при



В развернутой матричной форме

.

В сокращенной форме .

Решим матричное уравнение, умножив его слева на . Тогда

 или



Последнее соотношение позволяет вычислить координаты вектора  в новом базисе, зная его координаты в старом.

***Задача 7.*** Найти связь координат одного и того же вектора в двух базисах:

, ,  и , , .

*Решение*:

Задача сводится к вычислению матрицы перехода от векторов старого базиса к векторам нового:





.

Получаем три системы с девятью переменными. Преобразуем по методу Гаусса расширенную матрицу первой системы:

.

Отсюда , , .

Для второй и третьей систем матрицы коэффициентов преобразуем аналогично:



Тогда , , .



Тогда , , .

Следовательно, матрица перехода будет иметь вид:

.

Если вектор  имеет в старом и новом базисе соответственно  и , то связь координат этого же вектора в двух базисах имеет вид

.

***Задача 8.*** Решить задачу 7, выразив  через *Х*.

*Решение*:

Переход к новому базису можно рассчитать быстрее. Запишем матрично-векторное уравнение

,

в матричном виде

,

где матрица *В* составлена из координат вектора нового базиса, размещенных по столбцам матрицы, матрица *А* составлена из координат векторов старого базиса, размещенных также по столбцам,  - матрица перехода от старого базиса к новому.

Умножим обе части уравнения сначала на  слева, затем на  справа. Получим

.

Известно, что координаты вектора в старом базисе *Х* связаны с координатами этого вектора в новом базисе  соотношением

.

Отсюда

 или .

Особенно эффективно этот способ работает при переходе к ортонормированному базису. Тогда матрица *В* и матрица  - единичные. Задача нахождения координат вектора в новом базисе сводится к матричному умножению матрица *А*, составленной из координат векторов старого базиса на матрицу координат вектора в старом базисе.

.

В нашем случае надо вычислить произведение матриц . Это удобно сделать по методу Жордана. Известно, что элементарными преобразованиями левую часть матрицы Жордана  можно привести к единичному виду, тогда в правой части образуется обратная матрица, т.е. . Аналогично матрицу  элементарными преобразованиями можно привести к виду , затем взять произведение матриц  и получить  - координаты вектора в новом базисе через его координаты в старом.

Продолжим решение задачи 3 указанным методом и выразим  через *Х*. для этого составим матрицы

, 

и матрицу Жордана

.

Путем элементарных преобразований приведем леву часть матрицы Жордана к единичному виду









Следовательно,

.

Умножим полученную матрицу на вектор столбец , получим

.

***Задача 9***. Пусть V – линейное подпространство пространства W, содержащее векторы , , . Вектор  принадлежит W. Содержится ли он в подпространстве V?

*Решение*:

Если вектор , то он является линейной комбинацией векторов 

.

Запишем векторное равенство в развернутой матричной форме

.

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду



.

Ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы не совпадают. Значит вектор  нельзя представить в виде линейной комбинации векторов , а вектор .

***Задача 10***. Найти систему однородных линейных уравнений, задающую линейное подпространство, содержащее следующие векторы:

, 

, 

*Решение*:

*1-й способ*. Найдем ранг данной системы векторов



.

Ранг системы равен 2, следовательно, только два вектора из четырех являются линейно независимыми, например, . Тогда линейное подпространство есть совокупность всех линейных комбинаций

, .

Эту линейную комбинацию надо записать как совокупность фундаментальных решений однородной системы уравнений, у которой  переменных, из них две свободные переменные и три базисные. Следовательно, ранг системы уравнений

,

т.е. она должна содержать три независимых уравнения.

Векторы  для написания предварительно отдельных фундаментальных решений (линейно независимых векторов) – не годятся, так как фундаментальные решения должны содержать хотя бы по одному нулю среди своих элементов.

Поэтому возьмем две их линейные комбинации, например,



Тогда общее решение системы уравнений можно записать в виде

,

а система уравнений будет иметь вид



или окончательно



Конечно, задача имеет не единственное решение. Можно указать и другие системы однородных уравнений, задающие рассматриваемое пространство.

Например, взяв линейные комбинации



получим общее решение некоторой системы линейных уравнений в виде

.

Соответствующая система уравнений в подробном виде выглядит так:



После преобразований получим:



*2-й способ*. Другой способ решения задачи основан на использовании теоремы Кронекера-Капелли.

Введем произвольный вектор . Для координат вектора  найдем соотношения, при которых вектор  принадлежит подпространству. Разложим вектор  по заданным векторам

.

Вектор  можно было бы разложить только по линейно независимым векторам, например, . Система выглядела бы проще. Однако в этом случае необходимо было бы провести предварительный анализ набора векторов  по выделению из них линейно независимых векторов.

Распишем векторное равенство в координатах



Составим расширенную матрицу системы и, используя метод Гаусса, приведем матрицу к ступенчатому виду



.

Система должна иметь решения, поскольку вектор  принадлежит подпространству. Ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы системы по теореме Кронекера-капелли будут равны. Это выполняется при соблюдении условий:



Полученная система однородных линейных уравнений задает требуемое линейное подпространство.

***Задача 11***. Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств, содержащих системы векторов

, , 

и , , 

*Решение*:

Определим ранг каждой системы векторов



.

Для определения размерности суммы линейных подпространств возьмем из каждой системы векторов по два линейно независимых вектора и найдем размерность суммы этих четырех векторов.

.

Следовательно, совокупность заданных в условии векторов задает линейное подпространство размерности 3. Возьмем из первой системы векторов любые два линейно независимых вектора, например, , и один вектор из второй системы, например . Эти векторы линейно независимы, поэтому образуют базис суммы линейных подпространств.

Размерность каждой заданной системы векторов равна 2, максимальная размерность суммарной системы векторов в общем случае может быть равной 4, но оказалась равной 3, значит, размерность величины 1 – это то общее, что объединяет векторы, т.е. размерность из пересечения.

Размерность пересечения двух подпространств может быть найдена по формуле:

.

Найдем базис пересечения двух подпространств. Предположим, что некоторый вектор  принадлежит первому подпространству. Тогда справедливо разложение

.

Этот же вектор принадлежит и другому подпространству

.

Приравняем эти равенства

.

Подберем такие значения коэффициентов, которые обращают векторное уравнение в верное равенство, для чего распишем уравнение в матричном виде и решим получающуюся однородную систему уравнений

 или 

Решая, полученную систему уравнений методом Гаусса получаем:





.

Пусть . Найденные значения коэффициентов  подставим в векторное уравнение

.

Вектор  является общим вектором для обоих подпространств. Он и может быть положен как одномерный базис подпространства, являющегося пересечением двух рассматриваемых подпространств.

***Задача 12***. Для линейного подпространства V заданного системой однородных уравнений



а) найти базис линейного подпространства;

б) найти базис ортогонального дополнения .

*Решение*:

а) Решим однородную систему уравнений, приведя матрицу коэффициентов к треугольному виду



Ранг матрицы равен 2, число переменных 4, значит, решение будет содержать две базисные переменные и две свободные.

Возьмем в качестве свободных переменных . Тогда общее решение однородной системы



будет иметь вид



, где 

Векторы  и  - фундаментальные решения системы уравнений – являются линейно независимыми, поэтому задают линейное векторное подпространство V размерности 2, все векторы которого  - есть бесконечное множество решений нашей системы.

б) *1-й способ*. Для нахождения ортогонального дополнения  к этому подпространству рассмотрим векторы , ортогональные к векторам базиса подпространства V:



Соответствующая система уравнений имеет вид:



Эта система задает все векторы, ортогональные к подпространству V. Ранг системы равен 2, а число переменных 4, следовательно, число свободных переменных равно 2. Пусть это будут . Тогда общее решение системы можно записать в виде



, где .

Совокупность векторов  есть линейное векторное подпространство  с базисом  и .

*2-й способ.* Представим уравнения системы в виде скалярных произведений векторов *х* на некоторые векторы

, , ,

координаты которых составлены из коэффициентов уравнений системы, а именно:



Следовательно, векторы  ортогональны всем векторам , т.е. ортогональны подпространству V и поэтому принадлежат подпространству . Определим среди них линейно независимые

.

Ранг матрицы равен 2. среди векторов  два линейно независимых вектора. Это, например, . Они и составляют базис подпространства .

Покажем, что оба способа приводят к одному и тому же подпространству. Так,



.

***Задача 13***. Найти угол между вектором  и линейным подпространством V, содержащем векторы , .

*Решение*:

*1-й способ*. Найдем ортогональное дополнение  к подпространству V. Оно состоит из векторов , таких, что



Запишем эти равенства в виде системы уравнений и решим ее.



, где .

Векторы  и  являются независимыми и составляют базис подпространства . На основе этого базиса построим ортогональный базис, т.е. проведем процесс ортогонализации полученного базиса.

В качестве 1-го вектора ортогонального базиса возьмем вектор ,

.

Тогда ортонормированный вектор

.

Построим вектор

,

такой, что

.

Получим

, и .

Поэтому

.

Векторы  и  ортогональны. Вектор  можно было получить как . Любой вектор *а*, ортогональный одновременно векторам  и , принадлежит подпространству V. Тройка векторов  ортогональна.

Пусть α, β, γ – углы между вектором *х* и векторами  соответственно. Тогда

.

Найдем  и .

,

.

Тогда

.

Из множества решений берем наименьший положительный угол . Это и есть угол между вектором *х* и линейным подпространством V.

*2-й способ*. Любой вектор *х* пространства W можно представить, причем единственным образом, в виде суммы векторов из V и :

,

где вектор  есть ортогональная проекция вектора *х* на линейное подпространство V, а вектор  есть ортогональная составляющая.

Опираясь на векторы  и , построим ортонормированный базис подпространства V

.

Используя процесс ортогонализации получим второй вектор :

, где ,

,

,

,

,

тогда

.

Отсюда

.

Разложим ортогональную проекцию у по ортонормированному базису подпространства V:

.

Тогда вектор *х* будет равен

.

Умножим обе части равенства последовательно на  и :

,

,

,

.

Поэтому

.

Косинус угла между вектором *х* и его ортогональной проекцией *у* будет равен

.

Отсюда .

***Задача 14***. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

.

*Решение*:

Найдем собственные значения матрицы, решая векторное уравнение

,

где  - предполагаемый собственный вектор, λ – собственное число.

Уравнение в матричном виде запишется так:

,

или ,

.

Это уравнение всегда имеет нулевое решение. Чтобы оно имело и ненулевые решения, должно выполняться условие

.

Найдем матрицу . Ее вид

.

Следовательно, .

Раскрывая определитель по правилу треугольников, получим

 или .

Решение уравнения . Это по определению собственные числа матрицы.

Для нахождения собственных векторов подставим  в уравнение . В развернутом матричном виде получим

,

.

Матричное уравнение можно записать в виде системы уравнений



Система уравнений является однородной, определитель матрицы коэффициентов системы равен нулю. Поэтому, кроме нулевого решения, система имеет и другие решения. Найдем их с помощью метода Гаусса.

.

Отсюда следует система уравнений:



.

Векторы , где , есть собственные векторы исходной матрицы, соответствующие собственным числам .

***Задача 15***. Решить уравнение линейного преобразования, т.е. найти матрицу линейного оператора из равенства

, где , , .

*Решение*:

Напишем уравнение в матричной форме

,

а затем в виде системы линейных уравнений



Перенеся все члены в одну часть, получим



Система имеет решение для любой пары переменных  при условии, что все коэффициенты перед переменными равны нулю, т.е.



Следовательно, матрица оператора имеет вид

.

***Задача 16***. Найти квадратичную форму , полученную из квадратичной формы  в результате действия линейного оператора на вектор : .

*Решение*:

Действие линейного оператора  порождает вектор

,

что приводит к преобразованию квадратичной формы



в форму



.

После перемножения матриц получаем

.

***Задача 17***. Найти линейный оператор , под действием которого квадратичная форма  принимает канонический вид. Привести этот канонический вид квадратичной формы.

*Решение*:

Преобразуем квадратичную форму  к каноническому виду



Введем новые переменные



в которых форма будет представлена в каноническом виде

.

Решив систему уравнений относительно переменных , получим



Следовательно, линейный оператор , под действием которого форма  преобразуется в форму  имеет вид

.

***Задача 18***. Квадратичную форму  привести к каноническому виду.

*Решение*:

После замены переменного  форма  переходит в форму , которая должна содержать только слагаемые с квадратами переменных.

Таким образом, задача равнозначна следующей: найти ортогональную матрицу P такую, чтобы матрица  имела диагональный вид. Это всегда возможно для симметрической матрицы L, если в качестве столбцов искомой матрицы P выбрать ортонормированную систему собственных векторов матрицы формы L. Тогда посредством замены  квадратичная форма приводится к виду

,

где  - собственные значения матрицы P с учетом кратности.

Итак, находим собственные значения и собственные векторы матрицы .

Получим собственные значения , ,  и соответствующие им собственные векторы

, , .

Так как собственные значения попарно различны, то соответствующие им векторы попарно ортогональны. Для получения ортонормированной матрицы их необходимо пронормировать.

Тогда ортогональная матрица будет иметь вид



и посредством замены  исходная квадратичная форма переводится в каноническую форму

.

***Задача 19***. Исследовать квадратичную форму



на знакоопределенность

*Решение*:

Составим матрицу квадратичной формы

.

Найдем угловые миноры:

, , .

Поскольку есть миноры, равные нулю, форма не является положительно определенной.

Рассмотрим миноры

, ,

которые вместе с угловыми, составляют главные миноры. Все они неотрицательны. Следовательно, форма является положительно полуопределенной.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 8.1*.** Выяснить, являются ли векторы , ,  линейно зависимыми.

***Задание 8.2*.** Вычислить ранг и указать возможный базис системы векторов , , 

***Задание 8.3*.** Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

***Задание 8.4***. Выразить координаты вектора  в новом базисе через его координаты в старом базисе, если старый базис , , а новый базис , 

***Задание 8.5***. Вектор  задан в базисе , , . Найти его координаты в базисе , , .

***Задание 8.6***. Найти размерность и базис линейных подпространств, содержащих следующие системы векторов:

а) , , , ;

б) , , , ;

***Задание 8.7***. Найти систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, содержащее векторы , , .

***Задание 8.8***. Найти базис ортогонального дополнения  подпространства V, содержащее векторы , , .

***Задание 8.9***. Найти размерности суммы и пересечения линейных подпространств  и :

***Задание 8.10***. Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств  и :

***Задание 8.11***. Найти ортогональную проекцию *у* и ортогональную составляющую *z* вектора *х* на линейное подпространство *L*, если

, 

***Задание 8.12***. Найти угол между вектором х и линейным подпространством L, если

, 

***Задание 8.13***. Матрица  линейного оператора задана в старом базисе. Какой вид имеет матрица оператора в новом базисе , ?

***Задание 8.14***. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

а) ; б) .

***Задание 8.15***. Записать квадратичную форму  в матричном виде.

***Задание 9.16***. Привести к каноническому виду квадратичную форму  и определить ее ранг.

***Задание 9.17***. Найти линейный оператор , переводящий квадратичную форму  в квадратичную форму .

***Задание 9.18***. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность:

а) ; б) .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение векторного пространства.
2. Дайте определение линейной зависимости векторов.
3. Что называют линейной комбинацией векторов.
4. Что называют базисом вектора?
5. Что значит размерность векторного пространства?
6. Что называют линейным подпространством?
7. Сумма и пересечение линейных подпространств.
8. Дайте понятие собственных чисел вектора.
9. Дайте понятие линейного оператора.
10. Дайте понятие собственные значения оператора.
11. Дайте понятие матрицы линейного оператора.
12. Дайте понятие квадратичной формы.
13. Запишите канонический вид квадратичной формы.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 8.1*.** Найти все возможные значения , при которых выполняется равенство , для векторов , ,  и сделать вывод о линейной зависимости или независимости векторов.

***Задание 8.2*.** Доказать, что система векторов, содержащая два пропорциональных вектора, линейно зависима.

***Задание 8.3*.** В некотором базисе заданы векторы , , . Найти разложение вектора  по базису .

***Задание 8.4***. Найти связь координат одного и того же вектора в разных базисах, если старый базис , , а новый базис , 

***Задание 8.5.*** Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис по заданному базису: , .

***Задание 8.6***. Найти базис подпространства, заданного системой уравнений



***Задание 8.7***. Найти базис ортогонального дополнения  подпространства V, заданного системой однородных уравнений



***Задание 8.8***. Найти базис пересечения линейных подпространств  и :

***Задание 8.9***. Найти матрицу линейного оператора преобразования , если векторы *х* и *у* принадлежат одному векторному пространству и разложены по одному базису.

***Задание 8.10***. Решить уравнение линейного преобразования вектора х (матрично-векторное уравнение), где , т.е. найти матрицу линейного оператора из равенства а) , где ; б) , где , .

***Задание 8.11***. Матрица  линейного оператора задана в некотором базисе. Перейти к новому базису, состоящему из собственных векторов матрицы. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

***Задание 8.12***. Найти квадратичную форму , полученную из квадратичной формы  в результате действия линейного оператора  (линейное преобразование ).

***Задание 8.13***. Найти линейный оператор , под действием которого квадратичная форма  примет канонический вид. Привести этот канонический вид квадратичной формы.

***Задание 8.14***. Используя собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы , привести ее к каноническому виду.

# Практическое занятие 9. Линии на плоскости

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Прямоугольная система координат Оху* на плоскостизадается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единич­ный отрезок. Эти прямые называют *осями координат.* Одну из осей называют *осью абсцисс* иобозначают Ох*,* другую – *осью ординат* (Oy).

*Расстояние между двумя точками* М1(х1, у1) и М2(х2, у2)на плоскости вычисляется по формуле

.

*Координаты (х; у) точки М, делящей в заданном отношении* λ *от­резок АВ*, где A(х1, у1) и В(х2, у2) находятся по формулам

, , .

В частности, при λ =1 (точка М делит отрезок АВ пополам), получа­ются формулы координат середины отрезка

, .

Площадь треугольника с вершинами A(х1, у1), В(х2, у2), С(х3, у3) вычисляется по формуле:



или то же самое:

, где .

*Полярная система координат* задается точкой О, называемой полюсом, лучом Ор, называемым *полярной* осью, и *единичным* *вектором * того же направления, что и луч Ор*.*

Связь между полярными и прямоугольными координатами точки устанавливается формулами:

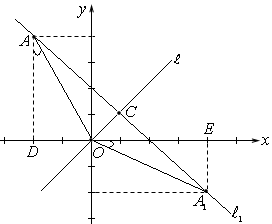
 и 

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти точку, симметричную точке  относительно биссектрисы первого координатного угла.

*Решение*:

Проведем через точку *А* прямую , перпендикулярную биссектрисе  первого координатного угла.



Пусть . На прямой  отложим отрезок , равный отрезку *АС*. Прямоугольный треугольники *АСО* и  равны между собой (по двум катетам). Отсюда следует, что . Треугольники  также равны между собой (по гипотенузе и острому углу). Заключаем, что , , т.е. точка  имеет координаты , , т.е. .

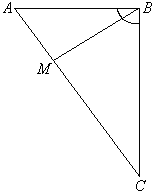
Отметим, что имеет место общее утверждение: точка , симметричная относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеет координаты  т. е. 

***Задача 2.*** В треугольнике с вершинами , ,  найти длину биссектрисы *ВМ*.

*Решение*:

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника





Находим длины сторон BC и ВА треугольника АВС по формуле

.

Получим ,

.

Следовательно,

 т.е. .

Находим координаты  и  точки *М*, используя формулы:

, .

Получим

, ,

т.е. .

Находим длину биссектрисы *ВМ*:

.

***Задача 3.*** Найти точку, в которой прямая, проходящая через точки  и  пересечет ось *Ох*.

*Решение*:

Координаты искомой точки С есть . А так как точки А, В и С лежат на одной прямой, то должно выполняться условие

,

площадь треугольника АВС равна нулю, где  - координаты точки А,  - точки В,  - точки С. Получаем

,

т.е.

,

,

.

Следовательно, точка С имеет координаты , , т.е. .

***Задача 4.*** Найти прямоугольные координаты точки М с полярным координатами .

*Решение*:

Имеем , . По формулам 

находим

,

.

Итак, .

***Задача 5.*** Найти полярные координаты точки *М* с прямоугольными координатами .

*Решение*:

Имеем , . По формулам



находим

,

.

Точка *М* лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что , получаем . Итак, .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 9.1.*** Доказать, что треугольник с вершинами ,  и  – прямоугольный.

***Задание 9.2.*** Дан треугольник с вершинами ,  и . Найти площадь этого треугольника.

***Задание 9.3.*** Разделить отрезок между точками и в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

***Задание 9.4.*** Найти прямоугольные координаты точек *А, В* для которых известны полярные координаты: , .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 9.1.*** | Дана точка . Найти координаты симметричных точке А относительно оси *Ох*, оси *Оу*, начала координат. | Найти координаты точки , симметричной точке  относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов. | Найти координаты точки , симметричной точке  относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. |
| ***Задание 9.2.*** Найти прямоугольные координаты точек *С, D, E* для которых известны полярные координаты: |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. В чем суть метода координат на плоскости?
2. Дайте характеристику прямоугольной системы координат на плоскости.
3. Как задается полярная система координат на плоскости?
4. Запишите формулы взаимосвязи между полярными и декартовыми координатами на плоскости.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Построение в математическом пакете MathCAD декартовых графиков

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 9.1.*** Точки ,  и  – три вершины параллелограмма, причем А и С – противоположные вершины. Найти четвертую вершину.

***Задание 9.2.*** Доказать что 3 точки лежат на одной прямой.

***Задание 9.3.*** На оси ординат найти точку, отстоящую от точки на расстояние 5 единиц.

***Задание 9.4.*** Найти полярные координаты точек *А, В, С, D, E* для которых известны прямоугольные координаты:

**, , , , .

# Практическое занятие 10. Уравнения прямой на плоскости

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. *Уравнение прямой* с *угловым коэффициентом* имеет вид

у=kх+b

2. *Общее уравнение прямой:*

Aх+Ву+С=0,

где А, В и С– постоянные коэффициенты, причем А и В одновременно не обращаются в нуль (А2+В2≠0).

Частые случаи этого уравнения:

С=0: Ах + By =0 – прямая проходит через начало координат;

В=0: Ах+С=0 – прямая параллельна оси Оу;

А=0: By + С= 0 – прямая параллельна оси Ох;

В=С=0: Ах=0 – прямая совпадает с осью Оу;

А=С=0): Ву=0 – прямая совпадает с осью Ох.

3. У*равнение прямой* в отрезках:

, (1.9)

где *а* и b – длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях Ох и Оусоответственно.

4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении:*

у–у0 = k(х–x0),

где k*=*tgα (α – угол, образуемый прямой с осью Ох); (x0,у0) – координаты данной точки. Это уравнение называют также уравнением пучка прямых с центром в точке (x0,у0); уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересеченья двух прямых A1х +В1у+С1=0 и A2х +В2у+С2=0 и имеет вид

A1х + В1у + С1 + λ ( A2х + В2у + С2)=0,

где λ – числовой множитель.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные* точки M1(х1, у1) и M2(х2, у2), где х1≠х2, у1≠ у2 имеет вид:

.

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле:

.

6. *Нормальное уравнение прямой:*

*х* соs α + *у* sin α – р = 0,

где р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α– угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ох.

Общееуравнение прямой Aх+Ву+С=0 можно преобразовать в нормальное уравнение путем умножения на *нормирующий множитель *; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена С (в общем уравнении прямой).

*7. Уравнение прямой* в полярных координатах имеет вид

*r*⋅cos(ϕ−α)=p.

Под *углом между прямыми в плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые  и  заданы уравнениями с угловыми коэффициента­ми у=k1х+b1 и у=k2х+b2,то угол ϕмежду ними вычисляется по формуле:

.

*Условие параллельности прямых*  и  имеет вид ,

а условие перпендикулярности

 или .

Если прямые  и  заданы общими уравнениями A1х +В1у+С1=0 и A2х +В2у+С2=0, то величина угла между ними вычисляется по формуле

,

условие их параллельности  или ,

условии их перпендикулярности .

Для нахождения общих точек прямых  и  необходимо решить систему уравнений

 или 

Расстояние *d* определяется по формуле .

Расстояние от точки М0(х0, у0) до прямой ** вычисляется по формуле **.

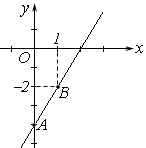
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.*** Построить прямую, заданную уравнением .

*Решение*:

*1-й способ*. Для построение прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, , получим Имеем одну точку . Полагая, получим. Отсюда вторая точка .

Осталось построить точки *А* и *В* и провести прямую



*2-й способ*. Задачу можно решить иначе, используя уравнения прямой в отрезках. Приведем уравнение к виду .

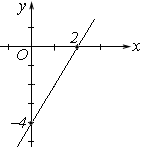
Для этого перенесем свободный член в правую часть уравнения и обе части разделим на 4. Получаем

,

,

.

На *Ох* отложим 2 единице вправо (от начала координат); на оси *Оу* отложим 4 единице вниз. Получаем две точки на осях, через которые проводим прямую:



***Задача 2.*** Уравнение прямой  представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения.)

*Решение*:

а) Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно *y*. Получим

,

и далее

,

т.е. получили уравнение прямой с угловым коэффициентом, где

, .

б) Для получения уравнения прямой в отрезках перенесем свободный член **вправо и разделим обе части уравнения на . В результате получим уравнение в отрезках на осях

,

где , .

в) Приведем исходное уравнение к нормальному виду

**.

Для этого умножим обе части уравнения исходного уравнения на нормирующий множитель

, т.е. .

Перед корнем взят знак «минус», т.к. свободный член(*С*=12) имеет знак «плюс». Получим

,

,

здесь

,  , , ,

т.е. расстояние от  до прямой равно 2,4.

***Задача 3.*** Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

а)  и , б)  и .

*Решение*:

а) Используем уравнение



Полагая в нем , , , , получим





 или .

б) Решаем аналогично



так как  заключаем, что

,

т.е.  - искомое уравнение прямой.

***Задача 4.*** Из пучка прямых определяемых уравнением  выделить ту, которая проходит через точку .

*Решение*:

Подставив координаты точки А в уравнение прямой, получим значение *k*:

,

.

Следовательно, искомое уравнение прямой есть

,

.

***Задача 5.*** Найти угол между прямыми:

а)  и , б)  и ,

в)  и , г)  и .

*Решение*:

а) Воспользуемся формулой



Подставляя в нее значения  и , находим

, т.е. .

б) Подставим значения , , ,  в формулу



получим

, т.е. .

в) Здесь  найдем . Для этого перейдем от  к эквивалентному равенству

.

Здесь . Так как

,

то данные прямые перпендикулярны. Получаем:

, т.е. .

4) , , , т.е. .

***Задача 6.*** Через точку пересечения прямых ,  проведена прямая, параллельная прямой . Составить ее уравнение.

*Решение*:

Найдем сначала точку *М* пересечения данных прямых. Для этого решим систему уравнений

, т.е. .

Угловой коэффициент прямой  есть . Следовательно, угловой коэффициент k прямой параллельной данной, есть . Запишем уравнение искомой прямой:

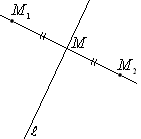
,

.

***Задача 7.*** Найти координаты точки , симметричной точке относительно прямой .

*Решение*:

Точки  и  лежат на прямой , перпендикулярной прямой , и одинаково удалены от прямой .



Найдем уравнение прямой . Так как угловой коэффициент , то угловой коэффициент k прямой  определяется равенствами



Поэтому уравнение прямой  есть

,

.

Найдем координаты точки *М* – точка пересечения прямой  и данной прямой, решая систему:



т.е.  делит отрезок  пополам. С помощью формул деления отрезка пополам находим

 и .

Отсюда

, .

Следовательно, координаты *х* и *у* искомой точки .

***Задача 8.*** Написать уравнение прямой , проходящей через точку  под углом  к прямой : .

*Решение*:

Угловой коэффициент прямой  равен , т.е. . Обозначим через  угловой коэффициент прямой . Тогда,

,  и .

Задача имеет два решения. Для каждого случая напишем уравнение прямой, проходящей через точку А в заданном направлении:

 и ,

 и .

***Задача 9.*** Найти расстояние между параллельными прямыми  и .

*Решение*:

Возьмем на первой прямой произвольную точку А. Пусть, например, , тогда, т.е. . По формуле



находим расстояние d от точки А до второй прямой:

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 10.1.*** Записать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и нормальное для заданных прямых и определить на каком расстоянии от начала координат они находится:

а) , б) ,

***Задание 10.2.*** Найти угловой коэффициент к прямой и ординату точки ее пересечения с осью *Оу*, зная, что прямая проходит через точки и .

***Задание 10.3.*** Какаю абсциссу имеет точка *М*, лежащая на прямой, проходящей через точки  и , и имеющая ординату, равную 22?

***Задание 10.4.*** Найти угол между двумя прямыми:

а)  и , б)  и ,

***Задание 10.5.*** Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1)  и ,

2)  и ,

***Задание 10.6.*** Найти уравнение прямой, проходящей через точку :

а) параллельно прямой ,

б) перпендикулярно прямой .

***Задание 10.7.*** Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку  и параллельной прямой , имеет вид .

***Задание 10.8.*** Точка  является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой . Найти площадь этого квадрата.

***Задание 10.9.*** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  так, чтобы расстояния от этой прямой до точек  и  были равны.

***Задание 10.10.*** Найти длину высоты *BD* в треугольнике *АВС* с вершинами , , .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 10.1.*** Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых: | и | и | и |
| ***Задание 10.2.*** При каких значениях *a* следующие пары прямых:  а) параллельны;  б) перпендикулярны? | и | и | и . |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Перечислите виды уравнений прямых на плоскости.
2. Что называют углом между прямыми на плоскости?
3. Назовите условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
4. Перечислите взаимное расположение прямых на плоскости.
5. Как вычислить расстояние от точки до прямой?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 10.1.*** Записать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и нормальное для заданных прямых и определить на каком расстоянии от начала координат они находится:

а) , б) .

***Задание 10.2.*** Прямая проходит через точки и  и пересекает ось *Оу* в точке С. Найти координаты точки С.

***Задание 10.3.*** Найти прямую, принадлежащую пучку  и проходящую через точку  и написать ее уравнение

***Задание 10.4.*** Найти угол между двумя прямыми:

а) и ; б)  и ,

в)  и .

***Задание 10.5.*** Найти угол между прямой и прямой, проходящей через точки  и .

***Задание 10.6.*** Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1)  и ,

2)  и ,

3)  и ,

4)  и ,

5)  и .

***Задание 10.7.*** При каких значениях *a* следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны?

1)  и ,

***Задание 10.8.*** Найти уравнение прямой, проходящей через точку :

а) параллельно прямой, соединяющей точки  и ,

б) перпендикулярно прямой .

***Задание 10.9.*** Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку  и перпендикулярной к прямой , имеет вид .

***Задание 10.10.*** Две стороны квадрата лежат на прямых  и . Найти площадь квадрата.

***Задание 10.11.*** Найти расстояние между прямыми  и .

# Практическое занятие 11. Линии в пространстве. Уравнение плоскости

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Положение любой точки в пространстве можно однозначно опреде­лить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система вклю­чает три взаимно–перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке О – *начале координат.* Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось Ох), другую – *осью ординат* (Оу), третью – *осью аппликат* (Оz).

*Расстояние между двумя точками* М1(х1, у1, z1) и М2(х2, у2, z2) вычисляется по формуле:

.

Координаты (х, у, z) *точки М, делящей* в *заданном* отношении λ  *от­резок АВ*, где A(х1, у1, z1) и В(х2, у2, z2) определяются по формулам:

, , .

В частности, при λ =1 (точка М делит отрезок АВ пополам), получа­ются формулы координат середины отрезка

, , .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.*** На оси *Оу* найти точку, равноудаленную от двух точек  и .

*Решение*:

Точка М, лежащая на оси *Оу*, имеет координаты . По условию задачи

.

Найдем расстояния  и :

,

.

Получим уравнение

.

Решая его находим

, т.е. .

Искомая точка есть .

***Задача 2.*** Отрезок АВ разделен на 3 равные части. Найти координаты точке деления, если известны точки  и .

*Решение:*

Обозначим точки деления отрезка через *С* и *D*. По условию задачи

.

Поэтому точка *С* делит отрезок *АВ* в отношении . Находим координаты точки *С* (используем формулы деления отрезка в данном отношении):

, , .

Имеем, .

Находим координаты точки *D* – середины отрезка *СВ*:

, , .

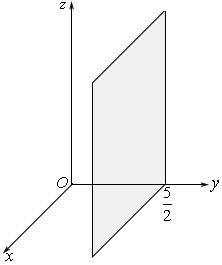
Точка D имеет координаты .

***Задача 3.*** Построить плоскости заданные уравнениями:

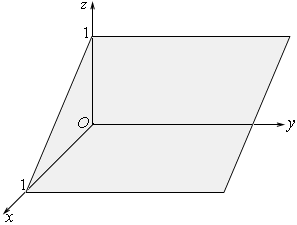
а) , б) , в) .

*Решение*:

а) Плоскость  параллельна плоскости *Охz*. Она отсекает на оси *Оу* отрезок, равный  и имеет вид:



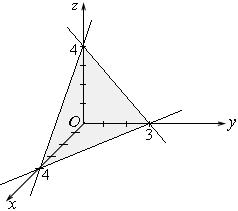
б) Плоскость  параллельна оси Оу. Она пересекает плоскость Охz по прямой , отсекая на осях Ох и Оz отрезки равные 1.



в) общее уравнение плоскости  перепишем в виде уравнения плоскости в отрезках:

, .

Эта плоскость отсекает на осях *Ох*, *Оу* и *Oz* отрезки, равные 4, 3, 4 соответственно.



***Задача 4.*** Уравнение плоскости  привести к нормальному виду.

*Решение*:

Умножим обе части данного уравнения плоскости на нормирующий множитель

****.

Так как свободный член , то  берем со знаком «плюс». Имеем

****.

,

.

Здесь , т.е. расстояние от точки  до плоскости равно 2.

, , .

***Задача 5.*** Написать уравнение плоскости параллельной оси *Oz* и проходящей через точки  и .

*Решение*:

Уравнение плоскости параллельной оси *Oz* имеет вид:

.

Так как плоскость проходит через точки  и , то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляем их в уравнение  и получим два уравнения



с тремя неизвестными А, В, D. Выразим неизвестные коэффициенты А и В через D:



Подставляем найденные значения А и В в уравнение , получаем

,

,

,

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 11.1***. Найти координаты точки на плоскости Оху, равноудаленной от трех точек: , , .

***Задание 11.2***. Дана точка . Найти координаты точки, симметричной данной относительно координатных плоскостей, осей координат, начала координат.

***Задание 11.3.*** Составить уравнение плоскости, проходящей через: а) точку  параллельно плоскости *Оху*, б) точку  и ось *Оу*. Построить эти плоскости.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 11.1.*** Составить уравнение и построить плоскость, проходящую через: | точку  и ось *Оу*. | точку  перпендикулярно оси *Ох* | точку  и отсекающей равные отрезки на положительных координатных полуосях |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Опишите декартову систему координат в пространстве.
2. Перечислите виды уравнений плоскости.
3. Запишите неполные уравнения плоскости.
4. Запишите нормальное уравнение плоскости.
5. Дайте определение нормирующего множителя.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Построение в математическом пакете MathCAD трехмерных графиков

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 11.1***. Показать, что треугольник с вершинами , ,  равнобедренный.

***Задание 11.2***. Дан треугольник с вершинами , , . Найти длину медианы, проведенной из вершины А.

# Практическое занятие 12. Уравнение плоскости

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*1. Уравнение плоскости, проходящей через точку М0(х0, у0, z0) перпендикулярно вектору* :

.

*2. Общее уравнение плоскости:*

Ax+By+Cz+D=0, (А2+В2+С2 ≠0).

Частные случаи уравнения:

D=0: Ax+By+Cz=0 – плоскость проходит через начало коор­­динат;

С=0: Ax+By+D=0 – плоскость параллельна оси Oz ;

В=0: Ax+Cz+D=0 – плоскость параллельна оси Oу;

А=0: By+Cz+D=0 – плоскость параллельна оси Oх;

D=С=0: Ax+By=0 – плоскость проходит через ось Оz (Ax+Cz=0, By+Cz=0 – через ось Оу и Ох соответственно);

В=С=0: Ax+D=0 –плоскость параллельна плоскости Оуz;

А=В=0: Cz+D=0 – плоскость параллельна плоскости Оху;

А=С=0: By+D=0 – плоскость параллельна плоскости Охz;

В=С=D=0: Ах=0, т.е. х=0 – плоскость совпадает с плоскостью Оуz (у=0, z=0 – уравнения плоскостей Охz и Оху соответственно);

*3. Уравнение плоскости в отрезках:*

,

где а,b, с– абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскостью координатных осей Ох, Оу и Оz соответственно.

4. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* М1(х1, у1, z1), М2(х2, у2, z2) и М3(х3, у3, z3):

.

*5. Нормальное уравнение плоскости:*

,

где р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость; α, β, γ – углы, образованные единичным вектором , имею­щего направление перпендикуляра с осями Ох, Оу и Оz

Oбщее уравнение плоскости приводится к нормальному виду путем умножения на *нормирующий множитель* . Знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена D (в общем уравнении плоскости).

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Если две плоскости Q1 и Q2 заданы уравнениями A1x+B1y+C1z+D1=0 и A2x+B2y+C2z+D2=0, то величина угла ϕ между ними вычисляется по формуле:

.

Наименьший, из двух смежных углов, образованных этими плоскостями находится по формуле:

.

Условие параллельности двух плоскостей Q1 и Q2 имеет вид

,

условие перпендикулярности

,

плоскости *совпадают, когда*

.

*Расстояние d от* точки М0(х0, у0, z0) до плоскости Ax+By+Cz+D=0 находится по формуле

.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.*** Написать уравнение плоскости проходящей через точку  перпендикулярно вектору , если .

*Решение*:

Так как данный вектор  перпендикулярен плоскости, т.е. , то отсюда следует, что  - нормаль плоскости.

Найдем координаты вектора :

,



Уравнение плоскости примет вид

.

Учитывая, что точка  лежит в плоскости, подстановкой ее координат в уравнение плоскости получим:

,

.

Тогда уравнение искомой плоскости

,

.

***Задача 2.*** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  и параллельной векторам  и .

*Решение****:***

*1-й способ*. Воспользуемся уравнением плоскости

****.

Имеем

****.

Найдем А, В, С. Так как плоскость параллельна векторам  и , то в качестве ее нормального вектора можно взять вектор . Получим

.

Значит, , , . Искомое уравнение плоскости

****,

.

*2-й способ*. Пусть точка  - произвольная точка плоскости. Составим вектор .

Так как векторы ,  и  компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т.е.



Раскрывая определитель, получаем

.

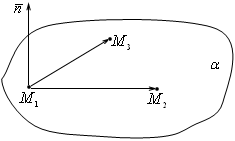
***Задача 3.*** Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки , , .

*Решение*:

Три точки, не лежащие на одной прямой определяют в пространстве единственную плоскость. Ее уравнение будем искать в виде

****.

Так как точки , ,  лежат в одной плоскости, то и векторы  и  также лежат в ней.



Векторное произведение векторов  и  перпендикулярно плоскости  в которой они лежат. Следовательно, в качестве нормали  к плоскости  можно взять вектор

.

Находим координаты векторов ,  и :

, ,

,

.

Следовательно, уравнение искомой плоскости будет иметь вид

.

Значение D находим из того, что точка  по условию задачи лежит в плоскости. Значит, подстановка координат точки  в уравнение плоскости обратит его в тождество. Имеем:

,

.

Итак, уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки , , , имеет вид

.

***Задача 4.*** Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точку  и линию пересечения плоскостей  и .

*Решение*:

Линия пересечения плоскостей – прямая. Выберем на ней две произвольные (несовпадающие) точки и найдем уравнение плоскости с помощью трех точек.

Решим систему уравнений



Пусть , тогда система примет вид



Получили точку .

Аналогично находим точку . Для этого фиксируем еще раз значение *х*, т.е. пусть , получим



Получили точку .

Таким образом, есть три точки ,  и , определяющие в пространстве плоскость. Найдем ее уравнение

, ,

,

.

Следовательно, уравнение искомой плоскости будет иметь вид

.

Подставляем координаты точки М в уравнение плоскости, получим:

,

.

Итак, уравнение искомой плоскости имеет вид

.

***Задача 5.*** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  параллельно плоскости .

*Решение*:

Так как плоскости параллель, то они имею общую нормаль, т.е.

.

Уравнение искомой плоскости имеет вид

.

Подставляя координаты точки  в уравнение плоскости найдем значение свободного члена D:

,

.

Уравнение искомой плоскости имеет вид

.

***Задача 6.*** Найти величину острого угла между плоскостями:

а)  и ,

б)  и .

*Решение*:

а) Воспользовавшись формулой

****,

находим

,

.

б) Для пары плоскостей выполняется условие перпендикулярности плоскостей:

****,

т.е.

.

Следовательно, плоскости взаимно перпендикулярны и .

***Задача 7.*** Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости  и удаленной от точки  на расстояние .

*Решение*:

По условию данная плоскость параллельна искомой, следовательно, уравнение искомой плоскости ищем в виде

.

Найдем значение D. Так как точка  удалена от искомой плоскости на расстояние , то используя формулу

****

получим

****,

,

, .

Условию задачи удовлетворяют два уравнения плоскости

,

.

***Задача 8.*** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  и , перпендикулярно плоскости .

*Решение*:

Так как точки  и  лежат в искомой плоскости, то и вектор  также лежит в ней. Его координаты .

Так как заданная и искомая плоскость перпендикулярны, то вектор-нормаль  заданной плоскости лежит в искомой.

Нормаль  искомой плоскости найдем по формуле

,

получим

,

.

Уравнение искомой плоскости примет вид

.

Подставляя координаты точки  в уравнение плоскости найдите значение свободного члена D:

,

.

Итак, уравнение искомой плоскости имеет вид

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 12.1***. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  и  параллельно вектору .

***Задание 12.2***. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку , параллельно векторам  и .

***Задание 12.3***. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки , , .

***Задание 12.4***. Найти величину острого угла между плоскостями:

а)  и ,

***Задание 12.5***. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

а)  и ,

***Задание 12.6***. Найти расстояние от точки  до плоскости, проходящей через точки , , .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 12.1***. | Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  перпендикулярно к линии пересечения двух плоскостей  и . | Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку  перпендикулярно плоскости . | Составить уравнение плоскости, проходящей через точку , параллельно плоскости . |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Что называют углом между плоскостями.
2. Сформулируйте условие параллельности двух плоскостей.
3. Сформулируйте условие перпендикулярности двух плоскостей.
4. Как найти расстояние от точки до плоскости?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 12.1***. Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей  и , и параллельной оси *Ох*.

***Задание 12.2***. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку , параллельно плоскости, проходящей через три точки , , .

***Задание 12.3***. Найти величину острого угла между плоскостями:

а)  и .

***Задание 12.4***. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

а)  и .

**Практическое занятие 13.**

**Тема:** **Уравнения прямой** **в пространстве**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. *Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку* (х0, у0, z0) параллельно вектору *,* имеют вид:

.

2. *Параметрические уравнения прямой:*



где t – переменный параметр, t∈ R.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки М1(х1, у1, z1), М2(х2, у2, z2), где х1≠х2, у1≠у2, z1≠z2, имеет вид:

.

4. Общее уравнение прямой:



 или ,

т.е.

.

Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами  и . Угол между прямыми L1 и L2 определяется из формулы

.

Условие перпендикулярности прямых L1 и L2 имеет вид

.

Условие параллельности (или совпадения) прямых:

.

Условием, при котором две прямые L1 и L2 лежат в одной плоскости, является равенство

.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.*** Общее уравнение прямой  преобразовать к каноническому виду и определить величины углов, образованные этой прямой с координатными осями.

*Решение*:

Для решения задачи необходимо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор .

Найдем точку на прямой. Для этого зафиксируем одну из переменных, например, пусть , получим



Итак, точка на прямой известна и ее координаты .

Направляющий вектор прямой находим по формуле

 или ,

получим

,

.

Воспользовавшись формулой



запишем каноническое уравнение искомой прямой

,

.

Определение величин углов между прямой и осями координат, сводится к нахождению углов между направляющим вектором  и осями. Воспользуемся формулами

, , .

Получим

,

,

.

***Задача 2.*** Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку  в каждом из следующих случаев:

а) прямая параллельна прямой 

б) прямая параллельна оси *Оу*,

в) прямая перпендикулярна плоскости .

*Решение*:

а) так как прямые параллельны, то они имеют один и тот же направляющий вектор, т.е.

.

Искомое уравнение прямой имеет вид



б) В качестве направляющего вектора оси Оу можно взять координаты орта , тогда направляющий вектор искомой прямой будет равен

.

Искомое уравнение прямой имеет вид



в) Вектор  перпендикулярен плоскости, но параллелен прямой. Следовательно, его можно взять в качестве направляющего вектора, т.е.

.

Искомое уравнение прямой имеет вид



***Задача 3.*** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  параллельно: а) вектору , б) прямой 

*Решение*:

а) В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку  возьмем вектор . Тогда искомое уравнение прямой примет вид

.

б) так как данная прямая и искомая параллельны, то у них общий направляющий вектор, т.е.

,

.

Искомое уравнение прямой имеет вид

.

***Задача 4.*** Найти величину острого угла между прямыми  и 

*Решение*:

Направляющий вектор первой прямой есть

.

Находим направляющий вектор второй прямой

,

.

Находим величину угла по формуле

,

получаем

,

.

***Задача 5.*** Установить взаимное расположение прямых:

а)  и 

б)  и .

*Решение*:

а) Выпишем направляюще векторы обеих прямых

, .

Координаты этих векторов пропорциональны .

Следовательно данные прямые параллельны или совпадают.

Возьмем точку  первой прямой и подставим ее координаты в уравнение второй, получим



Значит, точка  не принадлежит второй прямой. Следовательно, прямые параллельны.

б) Выпишем направляюще векторы обеих прямых

, .

Координаты этих векторов не пропорциональны, т.е.

.

Следовательно, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Проверим, принадлежат ли обе прямые одной плоскости.

Выпишем координаты точек прямых  и , и найдем координаты вектора 

, ,

.

Проверим условие компланарности для векторов , , :



Векторы не компланарны, значит прямые не лежат в одной плоскости. Следовательно данные прямые скрещивающиеся.

***Задача 6.*** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  перпендикулярно к прямым  и .

*Решение*:

*1-й способ*. Уравнение искомой прямой имеет вид

.

Найдем координаты  направляющего вектора  этой прямой. Так как прямые перпендикулярны, то можно записать

,

получим

.

Поэтому , , , где *t* – число.

Искомое уравнение прямой имеет вид

,

.

*2-й способ*. В качестве вектора  можно использовать вектор , т.к. искомая прямая перпендикулярна двум данным. Тогда

,

т.е. , , .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 13.1***. Найти направляющий вектор прямой 

***Задание 13.2***. Найти направляющие косинусы прямой 

***Задание 13.3***. Найти параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку  и параллельной вектору ,

***Задание 13.4***. Найти величину острого угла между прямыми:

а)  и ,

***Задание 13.5***. Выяснить взаимное расположение прямых:

а)  и 

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 13.1***. | Найти уравнение прямой, проходящей через точку  параллельно оси Оz | Найти уравнение прямой, проходящей через точку  параллельно прямой | Привести к каноническому виду прямую |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Перечислите виду уравнений прямой в пространстве.
2. Чем определяется любая прямая в пространстве?
3. Сформулируйте условие параллельности прямых в пространстве.
4. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых в пространстве.
5. Как определить величину острого угла между прямыми в пространстве?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 13.1***. Найти параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точки  и .

***Задание 13.2***. Найти величину острого угла между прямыми:

а)  и 

***Задание 13.3***. Выяснить взаимное расположение прямых:

а)  и .

# Практическое занятие 14. Прямая и плоскость в пространстве

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Угол между прямой (*L)  и плоскостью (Q) Ax+By+Cz+D=0 определяется по формуле

.

*Условие параллельность прямой* (L) *и плоскости* (Q)имеет вид

Am +Bp + Cq=0;

условие их перпендикулярности:

.

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой



координаты точки пересечения находятся из системы уравнений



*Условие, при котором прямая* L *лежит* в плоскости Q:



Если , то прямая пересекает плоскость; если  и  – прямая параллельна плоскости.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.*** Найти координаты точки, симметричной точке  относительно плоскости .

*Решение*:

Точка , симметричная точке  относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка , для которого серединой будет точка N пересечения прямой  и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра есть вектор нормаль к плоскости, т.е.

.

Уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку , имеет вид

,

или



Найдем координаты точки N пересечения перпендикуляра и плоскости, решая систему:



Итак, имеем точку  , которая является серединой отрезка . Тогда

, , .

Имеем

, , ,

, , .

Искомая точка  имеет координаты .

***Задача 2.*** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  и прямую 

*Решение*:

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

.

Выделим среди них плоскость, проходящую через точку , подставив ее координаты в уравнение пучка:

.

.

Находим уравнение искомой плоскости

,

.

***Задача 3.*** Найти величину угла между прямой  и плоскостью .

*Решение*:

Применяя формулу



находим

.

Значит, .

***Задача 4.*** Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

а)  и ,

б)  и .

*Решение*:

а) Имеем , .

Координаты векторов не пропорциональны, значит, прямая не перпендикулярна плоскости.

Найдем значение выражения :

.

Условие параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая пересекает плоскость.

б) Имеем

, .

.

Следовательно, прямая параллельна плоскости или лежит в ней. Проверим условие принадлежности прямой плоскости, подставив координаты точки  прямой в уравнение плоскости

.

Следовательно прямая лежит в плоскости.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 14.1***. Найти координаты точки, симметричной точке  относительно плоскости .

***Задание 14.2***. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

а)  и ,

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 14.1***. | Составить каноническое уравнение прямой, лежащей в плоскости Оху, проходящей через начало координат и перпендикулярно к прямой | Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  перпендикулярно прямой . | Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  и прямую |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Назовите типы взаимного расположения прямых в пространстве.
2. Сформулируйте условие параллельности прямой и плоскости.
3. Сформулируйте условие перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Как определить величину острого угла между прямой и плоскостью?
5. Сформулируйте условие принадлежности прямой плоскости.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 14.1***. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  перпендикулярно к прямым  и .

***Задание 14.2***. Найти величину угла между прямой  и плоскостью .

***Задание 14.3***. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

а)  и .

# Практическое занятие 15. Многомерная геометрия кривых и поверхностей: уравнения кривых

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Кривые второго порядка***

Кривыми второгопорядка это линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных *х* и у, т.е. уравнением вида:



где ().

***Окружность***

*Окружностью* называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки *А* на одно и тоже расстояние *R.* Точка *А* называется *центром,* а R – *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат каноническое уравнение окружности имеет вид:

(x−*a*)2+(y−b)2=R2,

где(*а*, b) – координаты ее центра.

***Эллипс***

*Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых от двух данных точек, на­зываемых *фокусами,* есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

*Каноническое уравнение эллипса:*

,

где *а* – *большая полуось*, b– *малая полуось* эллипса. Координаты фо­кусов: F1(–с, 0), F2(с, 0), где с – половина расстояния между фокусами. Числа *а*, bи ссвязаны соотношением с2=а2−b2.

Эксцентриситетом εэллипса называется отношение фокусного расстояния 2с (расстояния между фокусами) к большой оси 2*а*:

** (ε < 1, т.к. с < *a* ).

Фокальные радиусы определяются формулами:

, , .

*Директрисами* эллипса называется прямые  и , параллельные малой оси эллипса, отстоящие от нее на расстоянии, рав­ном  ; уравнения директрис:

 и .

***Гипербола***

*Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

*Каноническое, уравнение гиперболы:*

,

где *а* – *действительная,* b– *мнимая полуось* гиперболы. Числа 2*a* и 2b называются соответственно *действительной* и *мнимой осями* гиперболы. Координаты фокусов F1(–с, 0), F2(с, 0), где с – половина расстояния между фокусами.

Числа *а*, bи ссвязаны соотношением с2=а2+b2.

Число ** (ε > 1, т.к. с >*a* ), называется эксцентриситетом гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами:

для точек правой ветви гиперболы

, ,

для точек левой ветви

, 

Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых асимптотами гиперболы; они определяются уравнениями

.

Две прямые  и  параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, рав­ном , называются директрисами гиперболы. Их уравнения:

 и .

Эксцентриситет этой гиперболы равен , асимптоты определяются уравнением .

***Парабола***

*Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки, называемой *фокусом* и заданной прямой, называемой *директрисой.*

*Каноническое уравнение параболы* имеет вид:

у2 = 2рх,

где число р *>* 0, равное расстоянию от фокуса Fдо директрисы , называется *параметром* параболы. Координаты фокуса *.* Точка О(0, 0) называется *вершиной* параболы, длина *r* отрезка FМ – фокальный радиус точки М, ось Ох – ось симметрии параболы.

Уравнение директрисы параболы имеет вид

,

фокальный радиус вычисляется по формуле

.

Парабола, симметричная относительно оси Оу и проходящая через начало координат, имеет уравнение х2 = 2ру.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Показать, что уравнение  определяет эллипс, найти его оси, координаты центра и эксцентриситет.

*Решение*:

Преобразуем данное уравнение кривой.

,

,

,

,

,

.

Получили каноническое уравнение эллипса с центром симметрии в точке . Из уравнения находим:

, ,

, .

Имеем . Поэтому

,

.

Эксцентриситет эллипса

.

***Задача 2***. Дано уравнение эллипса . Найти:

а) длины его полуосей,

б) координаты фокусов,

в) эксцентриситет эллипса,

г) уравнение директрис и расстояние между ними,

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса  равно 12.

*Решение*:

Запишем уравнение эллипса в каноническом виде:

,

.

а) Имеем

, ,

, .

б) Используя соотношение , находим

, .

Следовательно,  и .

в) По формуле , находим эксцентриситет эллипса:

.

г) Уравнение директрис имеют вид:

.

Расстояние между ними

.

д) По формуле  находим абсциссу точек, расстояние от которых до точки  равно 12:

, .

Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординаты этих точек:

, .

Условию задачи удовлетворяет точка .

***Задача 3***. Дано уравнение гиперболы . Найти:

а) длины его полуосей,

б) координаты фокусов,

в) эксцентриситет гиперболы,

г) уравнение асимптот и директрис,

д) фокальные радиусы точки .

*Решение*:

Разделив обе части уравнения на 20, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду

.

Отсюда:

а) , , т.е. , ,

б) используя соотношение , находим , т.е. . Отсюда находим фокусы гиперболы:  и ,

в) находим ,

г) уравнение асимптот и директрис:

 и ,

д) точка *M* лежит на правой ветви гиперболы , поэтому:

,

.

***Задача 4***. Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси *Оу* и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

*Решение*:

Искомое уравнение гиперболы имеет вид

.

Согласно условию

, ,

, .

Найдем мнимую полуось *а*:

,

,

, .

Получаем

 - уравнение гиперболы.

***Задача 5***. Найти вершину, фокус и директрису параболы .

*Решение*:

Преобразуем уравнение , выделив в правой части полный квадрат:

,

т.е.

,

.

Вершина параболы имеет координаты .

, .

Прямая  является осью симметрии параболы.

Координаты фокуса

, ,

т.е. .

Уравнение директрисы

, .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 15.1***. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнение директрис эллипса .

***Задание 15.2***. Найти высоту арки моста длиной 24 м, имеющей форму параболы, уравнение которой .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 15.1***. | Эллипс касается оси *Оу* в точке  и пересекает ось *Ох* в точках  и . Составить уравнение эллипса, если оси его параллельны осям координат. | Составить уравнение эллипса, зная, что его большая полуось равна 10 и фокусы суть  и . | Парабола симметрична относительно оси *Ох*, ее вершина находится в начале координат. Составить уравнение параболы, зная, что она проходит через точку |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение окружности. Запишите каноническое уравнение окружности.
2. Дайте определение эллипса. Запишите каноническое уравнение эллипса.
3. Запишите формулы эксцентриситета и директрис эллипса?
4. Дайте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
5. Дайте определение фокальных радиусов гиперболы.
6. Запишите формулы эксцентриситета и асимптот гиперболы?
7. Какую гиперболу называют равнобочной?
8. Дайте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Построение в математическом пакете MathCAD полярных графиков

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 15.1***. Составить каноническое уравнение гиперболы, если: а) , , б) , , в) , уравнения асимптот .

***Задание 15.2***. Написать каноническое уравнение гиперболы, если а) и уравнения асимптот ; б)  и расстояние между директрисами равно ; в)  и точка  лежит на гиперболе.

# Практическое занятие 16. Многомерная геометрия кривых и поверхностей: уравнения поверхностей

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Поверхности второго порядка***

Уравнение F(x, y, z)=0 называется уравнением второго порядка, а поверхность, изображаемая этим уравнением называется поверхностью второго порядка.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Название поверхности* | *Канонический вид уравнений поверхности* | *Геометрическое изображение поверхности* |
| *Сфера* радиуса Rс центром в начале координат | x2+y2+z2=R |  |
| Сферу радиуса R с центром в точке М0(х0, у0, z0) | (x–x0)2+(y–y0)2+(z–z0)2=R2 |
| *Эллипсоид* |  |  |
| *Однополосный гиперболоид* |  |  |
| *Двуполостный гиперболоид* |  |  |
| *Параболоид* эллиптический |  |  |
| *Параболоид* гиперболический |  |  |
| *Конус эллиптический* |  |  |
| *Эллиптический цилиндр* |  |  |
| *Гиперболический цилиндр* |  |  |
| *Параболический цилиндр* | у2=2рх |  |

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей  и , если ее центр расположен на прямой .

*Решение*:

Определим точки  и  пересечения прямой с плоскостями (заметим, что прямая перпендикулярна плоскостям). Для этого параметрические уравнения прямой , ,  подставляем в уравнения плоскостей, находим *t* и возвращаемся к этим уравнениям.

,

, .

Аналогично находим .

Центр сферы  - середина отрезка : . Радиус сферы

.

Уравнение сферы

.

***Задача 2***. Найти точки пересечения поверхности  и прямой .

*Решение*:

Параметрические уравнения прямой 

подставим в уравнение однополосного гиперболоида и определим значение *t*:

,

, .

Следовательно, 

Прямая имеет с гиперболоидом две совпадающие точки пересечения, т.е. прямая касается поверхности гиперболоида в точке .

***Задача 3***. Определить линию пересечения поверхностей

 и .

*Решение*:

Первая поверхность – эта сфера, вторая – плоскость. Они пересекаются или по окружности, или в одной точке, ил вовсе не пересекаются.

Найдем расстояние *d* от центра сферы  до плоскости .

.

Поскольку  ( - радиус сферы), то плоскость пересекает сферу по окружности.

Центр  этой окружности расположен на перпендикуляре , опущенном из центра сферы  на заданную плоскость.

Уравнение перпендикуляра  в параметрической форме имеет вид



Подставим эти равенства в уравнение плоскости и находим t:

, .

Подставим  в параметрические уравнения перпендикуляра . Находим: 

т.е.  - центр окружности пересечения сферы и плоскости.

Находим

,

, .

Таким образом, получено, что кривая



представляет собой окружность радиуса 5 с центром в точке .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 16.1***. Составить уравнение сферы с центром в точке  и касающейся плоскости .

***Задание 16.2***. Установить тип заданных поверхностей и построить их.

а) , б) ,

в) , г) 

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАБОТЫ В МАЛЫХ ГРУППАХ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Задание*** | ***Вариант 1*** | ***Вариант 2*** | ***Вариант 3*** |
| ***Задание 16.1***. Установить тип заданных поверхностей и построить их. |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Запишите уравнения сферы, эллипсоида.
2. Назовите виды гиперболоидов. Запишите их уравнения.
3. Назовите виды параболоидов. Запишите их уравнения.
4. Запишите уравнение конуса второго порядка.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 16.1***. Составить уравнение сферы с центром в точке , если она касается плоскости .

***Задание 16.2***. Установить тип заданных поверхностей и построить их.

а) , б) ,

в) , г) ,

д) .

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

**ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Жукова, Г.С. Аналитическая геометрия. Векторная и линейная алгебра: Учебное пособие / Жукова Г.С., Рушайло М.Ф. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 415 с. – Текст электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1067421.
2. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – 2-е изд., стереотип. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 352 с. – Текст электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1014764.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Бортаковский, А.С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учебное пособие / Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. – 2-е изд., стер. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 496 с. Текст электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1069929.
2. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебное пособие / Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. – 3-е изд., стер. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 592 с. Текст электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1045621.