|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | МИНОБРНАУКИ РОССИИ  Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  высшего образования  «МИРЭА – Российский технологический университет»  РТУ МИРЭА  Филиал РТУ МИРЭА в г. Ставрополе | |
|  |
|  |

**Методические указания**

**к практическим занятиям и самостоятельной работе**

по дисциплине

«**Математический анализ**»

*для студентов*

*направления подготовки:*

**09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

**Квалификация:** бакалавр

Часть 1.

**Ставрополь**

Методические указания, составлены в соответствии Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования и программой дисциплины «**Математический анализ**» для студентов *по направлению подготовки* **09.03.01** Информатика и вычислительная техника.

Составитель: Чекалова Л.А., к.п.н., доцент

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| ***Практическое занятие 1***. Операции над комплексными числами | 4 |
| ***Практическое занятие 2.*** Множества и операции над ними. Основные характеристики функций | 10 |
| ***Практическое занятие 3.*** Предел числовой последовательности. Предел и непрерывность функции | 20 |
| ***Практическое занятие 4.*** Производные и дифференциал функции. Применение производной при вычислении пределовфункции | 44 |
| ***Практическое занятие 5.*** Применение производной при исследовании функции | 65 |
| ***Практическое занятие 6.*** Производные и дифференциалы функций нескольких переменных | 76 |
| ***Практическое занятие 7.*** Экстремум функции нескольких переменных | 87 |
| ***Рекомендуемая литература*** | 94 |

**Практическое занятие 1.**

**Тема**: **Операции над комплексными числами**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Комплексным числом* называется упорядоченная пара (х, у) действительных чисел, записанных в виде z =x + *i*y. Символ *i* называется *мнимой единицей*.

Плоскость на которой изображаются комплексные числа называются *комплексной плоскостью* и обозначают С. Ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат – мнимой.

Комплексное число  можно изобразить и с помощью радиус-вектора .

Длина вектора , изображающего комплексное число z называется *модулем* этого числа и обозначается |z| или *r*. Модуль r = |z| определяется по формуле .

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором , изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа и обозначается *arg z*.

Запись числа z в виде  называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде  называется *тригонометрической формой*.

Аргумент ϕ определяется из формул , , где . Аргумент z можно найти, используя формулу , так как -π < *arg* z < π, то получим 3)

Запись числа в виде ) называют *показательной (*или экспоненциальной) формой комплексного числа.

*Действия над комплексными числами.* Основные действия над комплексными числами  и , заданные в алгебраической форме, определяются следующими равенствами:







 при (z2≠0)

При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:

если  и , то



Формула для возведения комплексных чисел в натуральную степень (формула Муавра) имеет вид: .

Деление комплексных чисел заданных в тригонометрической форме осуществляется по формуле: .

Корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

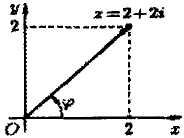
 где k=0, 1, 2, 3, …, n-1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.***Комплексное число  изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах.

*Решение:*

Комплексное число  задано в алгебраической форме: , . Изобразим число *z* на комплексной плоскости:



Используя формулу , находим модуль *z*:

,

Согласно формуле 

находим аргумент z: .

В тригонометрической форме  комплексное число запишется в виде: .

В показательной форме  комплексное число имеет вид:

.

***Задача 2.*** На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих следующим условиям: 

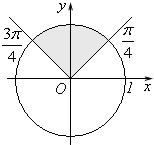
*Решение:*

Согласно формуле , имеем , или 

т.е. окружность радиуса  с центром в начале координат. Множество точек, удовлетворяющих условию  – это множество точек, расположенных на границе и внутри этого круга.

Множество точек удовлетворяющих условию  – это точки, заключенные между лучами  и .

Множество точек удовлетворяющих обоим условия можно изобразить на следующем рисунке:



***Задача 3.*** Даны два комплексных числа , . Найти: а) сумму; б) разность; в) произведение; г) частное.

*Решение:*

Используя формулы 5 – 8, находим:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

***Задача 4.*** Вычислить .

*Решение:*

Вычисления производим с учетом формул 5-8.

.

***Задача 5.*** Дано комплексное число z : а) возвести z в n-ю степень; б) найти все корни n-й степени из числа z: , при .

*Решение:*

а) Запишем число  в тригонометрической форме: ,

,

тогда .

По формуле Муавра 

имеем 

.

б) Воспользуемся формулой корня n-й степени



и найдем



, где .

Полагая , получим

, ,

.

***Задача 6.*** Решить уравнение **.**

*Решение:*

Перепишем уравнение в виде ******. Число (−243) представим в тригонометрической форме: .

По формуле 

находим ,

где . Полагая , получаем

, ,

, ,

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1.*** Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 2.*** На комплексной плоскости изобразить множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 3.*** Даны два комплексных числа z1 и z2. Найти: а) сумму; б) разность; в) произведение; г) частное.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | и |  | и |
|  | и |  | и |
|  | и |  | и |

***Задание 4.***Вычислить*:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 5.*** Дано комплексное число z: а) возвести z в n-ю степень; б) найти все корни n-й степени из числа z.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , n=5 |  | , n=6 |
|  | , n=4 |  | , n=5 |
|  | , n=5 |  | , n=3 |

***Задание 6.***Решить уравнение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте определение комплексного числа.
2. Каким свойством обладает мнимая единица?
3. Перечислить арифметические операции над комплексными числами.
4. Назовите формы записи комплексных чисел.
5. Как извлечь корень из комплексного числа?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1.*** Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 2.*** На комплексной плоскости изобразить множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 3.*** Даны два комплексных числа z1 и z2. Найти: а) сумму; б) разность; в) произведение; г) частное.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | и |  | и |
|  | и |  | и |

***Задание 4.***Вычислить*:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 5.*** Дано комплексное число z: а) возвести z в n-ю степень; б) найти все корни n-й степени из числа z.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , n=3 |  | , n=4 |
|  | , n=5 |  | , n=2 |

***Задание 6.***Решить уравнение:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**Практическое занятие 2.**

**Тема: Множества и операции над ними. Основные характеристики функций**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Множество* – совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Так можно говорить о множестве людей, точек плоскости, простых чисел, планет Вселенной и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Множества обозначаются прописными буквами: , а элементы – строчными буквами: .

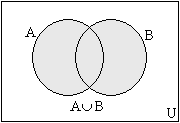
Различают *конечные* и *бесконечные* множества. Множество называется *конечным,* если оно состоит из конечного числа элементов.

*Операции над множествами*

*Объединением* (*суммой*) множеств *А* и *В* называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств обозначают *А*∪*В* (или *А+В*). Кратко можно записать

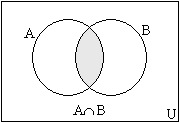
.

Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке 1.1 показано объединение множеств *А* и *В*.

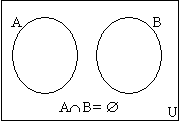


*Пересечением* (*произведением*) множеств *А* и *В* называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству *А* и множеству *В*. Пересечение множеств обозначают *А*∩*В* (или *А*·*В*). Кратко можно записать

.

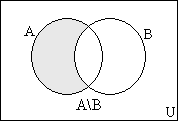


Если множества *А* и *В* не имеют общих элементов, то пересечением таких множеств является **пустое** множество *А*∩*В=* ∅ .



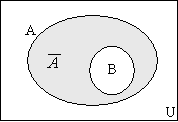
*Разностью* множеств *А* и *В* называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству *А*, но не принадлежащих множеству *В*. Разность множеств обозначают A\B. По определению

.



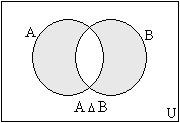
Пусть В⊂А. *Дополнением* множества *В* до множества *А* называется множество, содержащее все элементы множества *А*, которые не принадлежат множеству *В*. Обозначается дополнение множества  или , т.е.

.



*Симметрической разностью* (*кольцевой суммой*) называется множество элементов, принадлежащих либо множеству А, либо множеству В, но не принадлежащих им обоим одновременно. Симметрическая разность обозначается А Δ В или А ⊕В. Коротко можно записать

 или .



Основные характеристики функций

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие *f*, которое каждому элементу  ставит в соответствие единственный элемент , называется *функцией* и записывается  или .

Если элементами множеств *Х и Y* являютсядействительныечисла, то функцию  *f* называют *числовой функцией.*

*Графиком* *функции*  называется множество точек плоскости *Оху*, для каждой из которых *х* является значением аргумента, а *у* – соответствующим значением функции.

*Способы задания функции:* аналитический, гарфический, табличный.

*Основные характеристики функций*

1. *Четность* (*нечетность*) *функции*. Пусть функция , определенна на множестве D. Если  выполняется условие , то при

 - *функция* *четная*

 *функция* *нечетная*.

Если для функции  не выполняются оба условия, то ее называют *функцией общего вида*, т.е. не четная и не нечетная.

2. *Монотонность функции*. Пусть функция , определенна на множестве D и пусть . Если для любых значений , где , то при

 - функция возрастающая,

 - функция неубывающая,

 - функция убывающая,

- функция невозрастающая.

3. *Ограниченность функции*. Функцию , определенную на множестве D, называют *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число , что для всех  выполняется неравенство , т.е. , , называется ограниченной на D, если .

4. *Периодичность функции*. Функция , определенная на множестве D, называется периодической на этом множестве, если существует такое число , что при каждом  значение  и .

Число Т называется *периодом* *функции*.

Функция  называется *обратной* к функции  и записывается в виде .

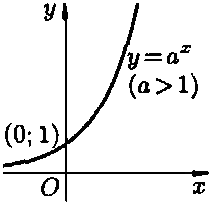
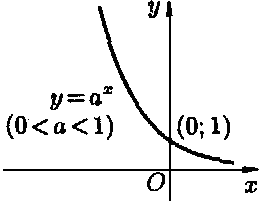
Функции  и  называют взаимно обратными.

*Сложная функция.* Пусть функция , определенная на множестве D, а функция  на множестве , причем  соответствующее значение . Тогда на множестве  определена функция , которая называется *сложной* *функцией* от *х* (или *суперпозицией* заданных функций, или *функцией* *от* *функции*).

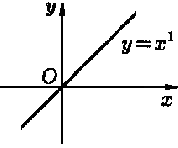
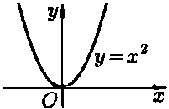
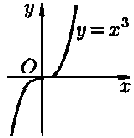
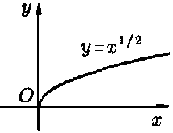
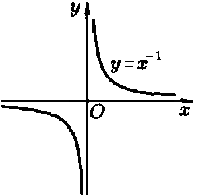
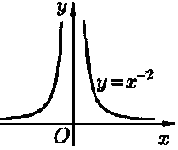
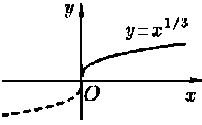
Переменную  называют *промежуточным* *аргументом* сложной функции.

*Основные элементарные функции и их графики:*

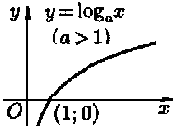
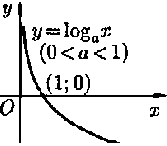
1. *Показательная функция* .

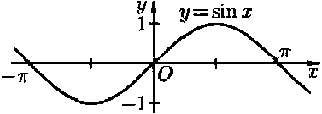
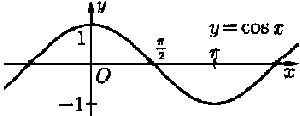
2. *Степенная функция* .

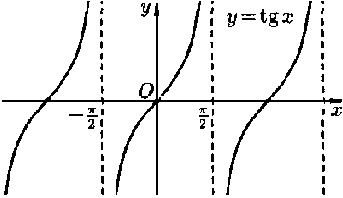
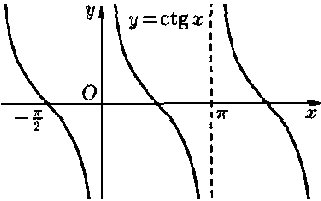
      

3. *Логарифмическая функция* .

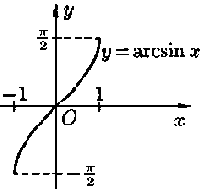
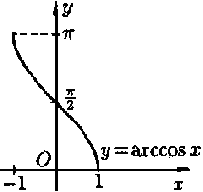
 

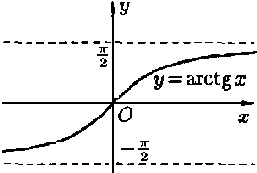
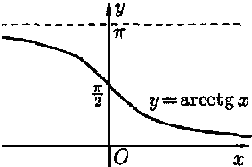
4. *Тригонометрические функции* , , , .

5. Обратные тригонометрические функции , , , .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1.*** Доказать равенство .

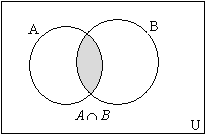
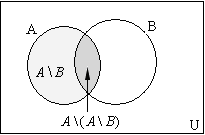
*Доказательство*:

Равенство можно доказать чисто формально, используя основные законы алгебры множеств, либо с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Если в исходном соотношении участвует не более трех множеств, то наиболее предпочтителен второй способ.

В нашем случае . Преобразуем левую часть



На рис. 1 изображены правая и левая части исходного равенства.

*Рис. 1.*

***Задача 2.*** Пусть , , . Из каких элементов состоят множества , , ?

*Решение*:

Перепишем множества *А*, *В* и *С*, перечислив их элементы:

, , .

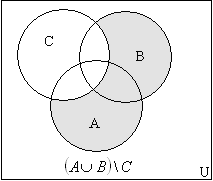
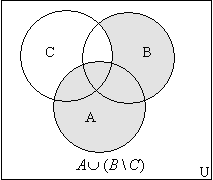
Тогда , , .

, .

***Задача 3.*** Доказать включения 

*Доказательство*:

Легче всего это сделать на диаграмме Эйлера-Венна (рис. 2.). Изобразим на одной диаграмме левую часть включения, а на другой правую часть и сравним полученные рисунки.

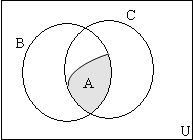
*Рис. 2.*

Как видим, на рисунке левая часть является подмножеством правой части.

***Задача 4.*** Доказать: если , то  и .

*Доказательство*:

Если , то  и . , т.е. , аналогично , т.е. . Это очевидно из рисунка 3.



*Рис. 3.*

***Задача 5***. Найти область определения функций:

а) , б) , в) .

*Решение*:

а) Дробь  определена, если ее знаменатель не равен нулю.

, , .

Поэтому .

б) Функция  определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. , . Поэтому .

в) Функция  определена, если выражение, стоящее под знаком логарифма положительно.

, .

Поэтому .

***Задача 6***. Найти множества значений функций:

а) , б) , в) .

*Решение*:

а) Так как , а  для всех значений *х*, то

 для всех *х*.

Функция  принимает все значения от 0 до , то .

б) , поэтому множество значений функции  совпадает с множеством значений функции  при . Отсюда .

в) , откуда , .

Итак, .

***Задача 7***. Для функции  найти: а) , б) , в) .

*Решение*:

а) , б) ,

в) .

***Задача 8***. Исследуйте функции четность и нечетность:

а) , б) , в) .

*Решение*:

а)  - функция нечетная.

б)  - функция четная.

в)  - функция общего вида.

***Задача 9***. Определить является ли функция периодической, и найти ее наименьший положительный период:

а) , б) , в) , г) .

*Решение*:

а) Наименьший положительный период функции равен , т.е. , .

Тогда период функции  равен .

Проверка: .

б) Для функции имеем , . .

Проверка: .

в) Для функции, имеем

, , .

, .

.

г) При  функция  определена и возрастает, поэтому она не может быть периодической. Следовательно, функция  не является периодической.

***Задача 10***. Найти обратную функцию для данной: а) , б) ,

в) .

*Решение*:

а) Разрешим функцию  относительно *х*: .

Тогда функция обратная к данной будет иметь вид: .

б) Разрешим функцию  относительно *х*: .

Тогда функция обратная к данной будет иметь вид: .

в) Разрешив исходную функцию  относительно *х*, найдем обратную , тогда .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1.*** Доказать равенства:

1. **
2. **
3. **
4. **
5. **

***Задание 2.***Даны множества *А, В* и *С.* Выписать: а) все элементы множества *М; б*) все элементы декартового произведения множеств *А* и *В.*

1. , , , .
2. , ,

, .

1. , , ,

.

1. , , , *M*=(*А*∩*С*)∪(*В*∩*С*).
2. , ,, .

***Задание 3.*** Доказать включения:

* 1. 
  2. 
  3. если , то  и 
  4. если , то 
  5. если , то  и 

***Задание 4.*** Доказать:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

***Задание 5***. Найти области определения функций:

а) , б) .

***Задание 6***. Найти множества значений функций:

а) , б) .

***Задание 7***. Для функции  найти: а) , б) .

***Задание 8***. Исследовать на четность и нечетность следующие функции:

а) , б) .

***Задание 9***. Какие из следующих функций периодические, а какие нет? Там, где возможно, найти наименьший положительный период функции:

а) , б) .

***Задание 10***. Найти обратную функцию для данной:

а) , б) .

***Задание 11***. Построить график функции .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте понятие множества.
2. Приведите пример конечного и бесконечного множества.
3. Назовите способы задания множеств.
4. Дайте определение объединения множеств.
5. Дайте определение пересечения множеств.
6. Дайте определение разности множеств.
7. Дайте определение симметрической разности множеств.
8. Дайте определение функции.
9. Сформулируйте правило определения четности и нечетности функции.
10. Какую функцию называют сложной?
11. Дайте определение обратной функции.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1.*** Доказать равенства:

1. **
2. **
3. **
4. **
5. **

***Задание 2.***Даны множества *А, В* и *С.* Выписать: а) все элементы множества *М; б*) все элементы декартового произведения множеств *А* и *В.*

1. , , , .
2. , , , .
3. , , , .
4. , ,

, .

1. , , ,

.

***Задание 3.*** Доказать включения:

* 1. если , то 
  2. если , то 
  3. если , то 
  4. если , то 
  5. 

***Задание 4.*** Доказать:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

***Задание 5***. Найти области определения функций .

***Задание 6***. Найти множества значений функций .

***Задание 7***. Для функции  найти: а) , б) .

***Задание 8***. Исследовать на четность и нечетность следующие функции:

а) , б) .

***Задание 9***. Какие из следующих функций периодические, а какие нет? Там, где возможно, найти наименьший положительный период функции:

а) , б) .

***Задание 10***. Найти обратную функцию для данной: а) , б) .

***Задание 11***. Построить график функции .

**Практическое занятие 3.**

**Тема: Предел числовой последовательности. Предел и непрерывность функции**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Под числовой последовательностью  понимается функция , заданная на множестве N натуральных чисел. Обозначается последовательность в виде  или .

Число  - называется первым элементом последовательности,  - вторым, …,  - *общим* или *n-м членом последовательности*.

Чаще всего последовательность задается формулой общего члена. Формула  позволяет вычислить любой член последовательности по номеру *n*.

Последовательность  называется *ограниченной*, если существует такое число , что для любого  выполняется неравенство .

В противном случае последовательность называется *неограниченной*.

Последовательность  называется *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого *n* выполняется неравенство .

Последовательность  называется *убывающей* (*невозрастающей*), если для любого *n* выполняется неравенство .

Последовательности возрастающая, неубывающая, убывающая, невозрастающая называются *монотонными*.

Если все элементы последовательности равны одному и тому же числу, то ее называют *постоянной*.

Способ задания числовых последовательностей, при котором задается первый член последовательности  и правило определения *n*-го элемента по -му называется рекуррентным .

Число *а* называется пределом числовой последовательности , если для любого положительного числа *ε* найдется такое натуральное число N, что при всех  выполняется неравенство .

В этом случае пишут  или 

и говорят, что последовательность  имеет предел равный числу *а* или, что последовательность  сходится к *а*.

Сходящаяся последовательность имеет только один предел. Последовательность не имеющая предела, называется *расходящейся*.

*Теорема*. Если ,  и, начиная с некоторого номера выполняется неравенство , то .

*Теорема*. Если ,  и, начиная с некоторого номера справедливо неравенство , то .

*Теорема Вейерштрасса*. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

По теореме Вейерштрасса последовательность ,  имеет предел, обозначаемый буквой *е*, т.е. .

Число *е* называют *неперовым* числом. Число *е* иррациональное, его приближенное значение .

Число *е* принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию е называется *натуральным логарифмом* и обозначается , т.е.

.

Связь между натуральным и десятичным логарифмом выражается равенством , где .

Последовательность  называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно малого числа  существует номер  такой, начиная с которого все члены последовательности по модулю будут больше , т.е.

, если .

В этом случае пишут .

Последовательность  называется *положительно* *бесконечно большой*, если , т.е. , если .

Последовательность  называется *отрицательно* *бесконечно большой*, если , т.е. , если .

Последовательность  называется *бесконечно малой*, если , т.е. , если .

Число А называется *пределом функции*  в точке  (или при ), если для любого положительного  найдется такое положительное число , что для всех , удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

Записывают .

Число  называется *пределом функции*  *слева* в точке , если для любого числа  существует число  такое, что при , выполняется неравенство .

Предел слева записывают .

Число  называется *пределом функции*  *справа* в точке , если для любого числа  существует число  такое, что при , выполняется неравенство .

Предел слева записывают .

Если существует , то существуют и оба односторонних предела, причем .

Если существуют оба односторонних предела  и  и они равны, то существует предел .

Если , то  - не существует.

Число А называется *пределом функции*  при,если для любого положительного числа  существует такое число , что при всех *х*, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

Записывают .

Функция  называется *бесконечно большой* *при* , если для любого числа  существует число , что для всех *х*, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

Записывают  или  при .

Функция  называется *бесконечно большой* *при* , если для любого числа  существует число , что для всех *х*, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

Функция  называется *бесконечно малой* *при* , если , т.е. для любого числа  существует число  такое, что для всех *х*, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

*Теорема*. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

*Теорема*. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

*Следствие 1*. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из теоремы 2 вытекает: произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

*Следствие 2*. Произведение бесконечно малой функции на число есть бесконечно малая функция.

*Теорема*. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

*Теорема*. Если функция  - бесконечно малая , то функция  есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция  - бесконечно большая, то  - бесконечно малая функция.

*Теорема*. Если функция  имеет предел, равный А, то ее можно представить как сумму числа А и бесконечно малой функции , т.е. если , то .

*Теорема* (*обратная*). Если функцию можно представить в виде суммы числа А и бесконечно малой функции , то число А является пределом функции , т.е. если , то .

*Основные теоремы о пределах:*

*Теорема 1*. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов этих функций: .

*Следствие*. Функция может иметь только один предел при .

*Теорема 2*. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов: .

*Следствие 1*. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:



*Следствие 2*. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: .

В частности , .

*Теорема 3*. Предел дроби равен отношению предела числителя к пределу знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

, .

*Теорема о пределе промежуточной функции*. Если функция  заключена между двумя функциями  и , стремящихся к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

, , , то

.

*Теорема о пределе монотонной функции*. Если функция  монотонная и ограничена при  или при , то существует соответственно ее левый предел  или ее правый предел .

*Следствие*. Ограниченная монотонная последовательность  имеет предел.

*Первый замечательный предел.* При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел отношения синуса к его аргументу, который равен единице, когда аргумент стремится к нулю, т.е. .

*Второй замечательный предел.* Известно, что предел числовой последовательности , , имеет предел равный *е*, т.е. .

К числу е стремится и функция  при :

.

Этот предел называют *вторым замечательным пределом*.

Пусть  , тогда второй замечательный предел перепишется в виде: .

*Непрерывность функции в точке, интервале и на отрезке:*

Функция  называется *непрерывной в точке* если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

.

Таким образом, должны выполняться следующие условия:

1) функция  определена в точке  и в ее окрестности;

2) функция  имеет предел при ;

3) предел функции в точке  равен значению функции в этой точке.

*Непрерывность функции в интервале и на отрезке*

Функция  называется *непрерывной на интервале * если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция  называется *непрерывной на отрезке * если она непрерывна в интервале ** и в точке  непрерывна справа , а в точке  непрерывна слева .

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называют *точками разрыва* этой функции.

Если  - точка разрыва функции , то вней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция  определена в окрестности точки , но не определена в самой точке.

2. Функция  определена в точке  и в ее окрестности, но не существует предела  при .

3. Функция  определена в точке  и в ее окрестности, но не существует , но этот предел не равен значению функции в этой точке, т.е. .

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва  называется *точкой разрыва первого рода* функции , если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т.е. , .

При этом:

а) если , точка  называется *точкой устранимого разрыва*;

б) если , точка  называется *точкой конечного разрыва*;

Величину  называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва  называется *точкой разрыва второго рода* функции , если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

*Теорема 1*. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций, есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

*Теорема 2*. Пусть функции  непрерывна в точке , а функция  непрерывна в точке . Тогда сложная функция , состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке .

*Теорема 3*. Если функция  непрерывна и строго монотонна на отрезке  оси *Ох*, то обратная функция  также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке  оси *Оу*.

Из приведенных теорем вытекает: всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

*Теорема Вейерштрасса*. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

*Следствие*. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

*Теорема Больцано-Коши*. Если функция  непрерывна на отрезке  и принимает на его концах неравные значения  и , то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между *А* и *В*.

*Следствие*. Если функция  непрерывна на отрезке  и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка  найдется хотя бы одна точка *с*, в которой данная функция  обращается в нуль: .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Написать первые четыре члена последовательности {*xn*}, если:

а) **** б) *****n*-й знак в десятичной записи числа *е*;

в) ****

*Решение*:

а)Подставляя поочередно  в формулу для общего члена последовательности, найдем: .

б)Поскольку , то , , , .

в) В соответствии с формулой  получим:

, , .

***Задача 2***. Найти первые пять членов последовательности:

а) , б) , в) , г) .

*Решение*:

: 

: 

: 

: 

: 

*Ответ*: .

***Задача 3***. Найти формулу общего члена последовательности:

а)  б)  в)  г) 

*Решение:*

а) , б) , в) , г) .

***Задача 4***. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? Ограничены снизу? Ограничены?

а) 2,4, 6, 8, …; б) −1, −4, −9, −16,…; в)  г) −2, 4, −8, 16,… .

*Решение*:

1) Данная последовательность, состоящая из всех четных положительных чисел, ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2) Последовательность ограничена сверху (), но не ограничена снизу.

3) Последовательность ограничена, так как она ограничена снизу и сверху: 

4) Последовательность  не ограничена, так как для любого числа *М* > 0 можно найти такой номер *n*, что 

***Задача 5***. Какие из следующих последовательностей монотонные, а какие - строго монотонные:

1)  2)  3) 

4)  5) ?

*Решение*:

1) Данная последовательность строго возрастает, т. к.  для всех натуральных чисел *n*.

2) Последовательность  не является ни монотонной, ни строго монотонной, так как, например, *х*1 < *x*2, но *х*2 > *х*3.

3)  – убывающая последовательность, так как 

4) Последовательность  – неубывающая, так как  и к тому же, например, *х*1 = *х*2.

5) Данная последовательность невозрастающая, так как  и некоторые (например, первый и второй) члены этой последовательности равны между собой.

***Задача 6***. Пусть  – две последовательности. Найти последовательности  и 

*Решение*:

По определению операций над последовательностями имеем:









***Задача 7***. Доказать, что 

*Решение*:

По определению, число 1 будет пределом последовательности , , если  найдется такое натуральное число N, такое, что для всех  выполняется неравенство , т.е. .

Оно справедливо для всех , т.е. для всех , где  - целая часть числа .

Целая часть числа *х*, обозначаемая , есть наибольшее целое число, не превосходящее х. Так, , 

Итак,  указано соответствующее значение N. Это доказывает, что .

***Задача 8***. Используя определение предела, доказать, что последовательность  сходится к числу 1.

*Решение*:

Обозначив  выберем произвольное число *ε* > 0. Тогда



и неравенство  будет выполнено в точности тогда, когда  т.е.  откуда 

Положив  получим, что для всех *n* ≥ *N* справедливо неравенство  В соответствии с определением предела это и означает, что 

***Задача 9***. Найти пределы последовательностей:

1)  2)  3) 

*Решение*:

1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень *n*, т.е. на *n*2: 

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:



В последних равенствах мы воспользовались тем, что предел константы – константа, а также тем, что последовательности  и  – бесконечно малые. Окончательно, 

2) Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:



Поэтому 

Поскольку последовательность  – бесконечно большая, то последовательность  – бесконечно малая.

Отсюда  а значит, и 

3) Поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень *n* (выбираем из двух вариантов  и ), т.е. на  Тогда



Оба слагаемых в знаменателе последней дроби, т.е.  и  – бесконечно малые последовательности, следовательно, вся эта дробь – бесконечно большая последовательность. Отсюда 

***Задача 10***. Доказать, что  используя: 1) первое определение предела функции; 2) второе определение предела функции.

*Решение*:

1) Пусть  – произвольная последовательность, сходящаяся к 2, т.е. такая, что  Тогда в соответствии со свойствами пределов последовательностей 

Так как  для любой последовательности , сходящейся к точке , то по первому определению предела функции это как раз и означает, что 

2) Зафиксируем произвольное . Требуется по этому *ε* найти такое , чтобы из условия , , т.е. из  вытекало бы неравенство , т.е. .

Последнее неравенство приводится к виду |, т.е. . Отсюда следует, что если взять  то неравенство  будет автоматически влечь за собой неравенство  (это значит, что для всех *x*, для которых верно первое неравенство, будет верно и второе). В соответствии со вторым определением предела функции это означает, что 

***Задача 11***. Доказать, что .

*Решение*:

Возьмем произвольное , найдем  такое, что для всех *х* удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство, т.е. .

Взяв  видим, что для всех *х*, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство . Следовательно, .

***Задача 12***. Доказать, что .

*Решение*:

Функцию  можно представить в виде суммы числа 7 и бесконечно малой функции  при , т.е. выполнено равенство

.

Следовательно, по теореме 2 получаем .

***Задача 13.*** Вычислить .

*Решение*:

.

***Задача 14***. Вычислить 

*Решение*:

Так как при  предел знаменателя равен нулю, теорему о пределе дроби применить нельзя. Предел числителя тоже равен нулю при , т.е. . Следовательно имеем неопределенность вида . Раскроем эту неопределенность, разложив числитель и знаменатель на множители:

.

***Задача 15***. Вычислить .

*Решение*:

.

***Задача 16***. Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

1)  2) 

3)  4) 

*Решение*:

1) Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:



.

2) Так как пределы числителя и знаменателя при  равны нулю, то мы имеем неопределенность вида  «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель :

.

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при , поэтому можно применить теорему о пределе частного:



Окончательно 

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида  Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):



.

4) Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность . Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень *х*, т.е. на :

****

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции  и  – бесконечно малые при :



.

***Задача 17***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 18***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 19***. Найти пределы:

1)  2)  3)  4) 

*Решение*:

1) Сделаем замену ; тогда  при  и



В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом. Таким образом, ****

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на *х*, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

.

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену  Тогда  при  а , откуда

.

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем – первый замечательный предел.

4) Сделаем замену , т.е. . Ясно, что  при , поэтому .

***Задача 20***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 21.*** Найти пределы:

1)  2)  3)  4) 

*Решение*:

1) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1∞. Для ее раскрытия сделаем замену  Тогда  при  и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

**

2) Поскольку  то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1∞, для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену . Тогда  при  и 

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на *х*, сведем данный предел к частному пределов:

.

4) Сделав замену  и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим: .

***Задача 22***. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1)  2) 

*Решение*:

1) В силу следствия из первого замечательного предела , . Отсюда (при ) , а , поэтому 

2) При  имеем  и , откуда

.

***Задача 23***. Пользуясь определением непрерывности функции доказать, что функция  непрерывна в произвольной точке .

*Решение*:

Пусть *Δx* – приращение аргумента в точке . Найдем соответствующее приращение функции:



Теперь, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получим:

.

Таким образом,  что и означает (по определению) непрерывность данной функции в точке .

***Задача 24***. Доказать, что функция  не является непрерывной в точке , но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции .

*Решение*:

Найдем односторонние пределы в точке . Слева от точки *х*0 имеем , поэтому .

Аналогично, .

Кроме того, , откуда следует, что

.

*О*

*x*

*y*

1*x*

Это означает, что в точке *О* не выполнены все условия непрерывности функции, но функция  непрерывна справа в этой точке.

***Задача 25***. Дана функция . Найти точки разрыва, и выяснить их тип.

*Решение*:

Функция  определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки .

Очевидно, что . Следовательно,

, .

Поэтому в точке  функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции в этой точке равен .

***Задача 26***. Исследовать на непрерывность и построить график функции



Найти скачок функции в точках скачка.

*Решение*:

Функции,  и  непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е. в точках  и . Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке  имеем:



Таким образом, в этой точке  т.е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции  в точке  равен .

Аналогично, для точки  получим: .

,

а значение  не определено. Отсюда следует, что  – точка устранимого разрыва для функции . Строим график функции.

*О*

*x*

*y*

1*x*

**

-1

-*π*

*y=x*

*y=sin x*

***Задача 27***. Установить характер разрыва функции  в точке .

*Решение*:

Находим: , ,

т.е. функция в точке  не имеет ни одного из односторонних пределов. Отсюда следует, что  – точка разрыва 2-го рода.

***Задача 28***. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция  непрерывна на промежутке .

*Решение*:

Функции ,  и  непрерывны на промежутке . Следовательно, данная функция  также непрерывна в каждой точке  как сумма непрерывных функций , (эта функция непрерывна, так как является произведением непрерывных функций  и ) и .

***Задача 29***. Найти , используя свойства непрерывных функций.

*Решение*:

Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т.е. при всех . Следовательно,  непрерывна и в точке , откуда



***Задача 30***. Исследовать функцию  на непрерывность на отрезке , если а) ; б) ; в) .

*Решение*:

Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т.е. при всех *х*, не равных  и 3. В точке  функция терпит разрыв 2-го рода, так как 

В точке  также разрыв 2-го рода, потому что



Отсюда следует, что данная функция непрерывна на отрезке  (т.к. .

На отрезке  функция непрерывна всюду, кроме точки , в которой терпит разрыв 2-го рода , .

На отрезке  функция имеет две точки разрыва 2-го рода , , а в остальных точках непрерывна .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***.Написать первые четыре члена последовательности {xn}, если:

а) , б) , в) ,

***Задание 2***. Зная несколько первых членов последовательности {xn}, написать формулу ее общего члена: а) , б) ,

***Задание 3***. Какие из следующих последовательностей {xn} ограничены, если:

а)  б)  в) 

***Задание 4***. Какие из следующих последовательностей монотонные? Строго монотонные? Ограниченные? а)  б)  в) 

***Задание 5***. Найти последовательности ,  и  если: 

***Задание 6***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 7***. Используя первое определение предела функции, найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 8***.Используя второе определение функции, доказать, что:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 9***. *Найти пределы:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 10***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 11.***Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 12***. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 13***. Пользуясь определением, доказать непрерывность функции  в каждой точке : а) , б) .

***Задание 14***. Доказать, что функция  не является непрерывной в точке , но непрерывна слева в этой точке. Построить график функции .

***Задание 15***. Исследовать на непрерывность и построить график функции . Найти скачок функции в точках разрыва.

***Задание 16***. Установить характер разрыва в точке *х*0 функции 

***Задание 17***. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция  непрерывна на промежутке .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 18***. Найти пределы, используя свойства непрерывных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 19***. Исследовать функцию  на непрерывность на отрезках ,  , , если: а) **** б) ****

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Какую последовательность называют *возрастающей*?
3. Какую последовательность называют *неубывающей*?
4. Какую последовательность называют *убывающей*?
5. Какую последовательность называют *невозрастающей*?
6. Дайте определение предела числовой последовательности.
7. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.
8. Какое число называют неперовым и чему равно его значение?
9. Дайте определение предела функции в точке.
10. Дайте определение предела функции слева, справа.
11. Дайте определение предела функции при ***.***
12. Какую функцию называют бесконечно большой? бесконечно малой?
13. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
14. назовите признаки существования пределов.
15. Сформулируйте замечательные пределы и запишите их формулы.
16. Назовите условия непрерывности функции в точке.
17. Что такое точка разрыва функции? Приведите классификацию точке разрыва функции.
18. Сформулируйте теоремы Больцано-Коши.
19. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***.Написать первые четыре члена последовательности {xn}, если:

а) , б) , в) ,

***Задание 2***. Зная несколько первых членов последовательности {xn}, написать формулу ее общего члена: а) , б) ,

***Задание 3***. Какие из следующих последовательностей {xn} ограничены, если:

а)  б)  в) 

***Задание 4***. Какие из следующих последовательностей монотонные? Строго монотонные? Ограниченные? а)  б) 

***Задание 5***. Найти последовательности ,  и  если 

***Задание 6***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а) |  | б) |  |
| в) |  | г) |  |

***Задание 7***. Используя первое определение предела функции, найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а) |  | б) |  |

***Задание 8***Используя второе определение функции, доказать, что:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 9***. *Найти пределы:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 10***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 11***.Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 12***. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 13***. Пользуясь определением, доказать непрерывность функции  в каждой точке .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 14***. Исследовать на непрерывность и построить график функции  Найти скачок функции в точках разрыва.

***Задание 15***. Установить характер разрыва в точке *х*0 функции 

***Задание 16***. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция  непрерывна на промежутке .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 17***. Найти пределы, используя свойства непрерывных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 18***. Исследовать функцию  на непрерывность на отрезках ,  , , если

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

**Практическое занятие 4.**

**Тема: Производные и дифференциал функции. Применение производной при вычислении пределовфункции**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Предел отношения приращения  функции в этой точке (если он существует) к приращению  аргумента, когда , называется *производной функции*  в точке .

Таким образом, . Производную функции обозначают одним из символов: , , , , .

Функция , имеющая производную в каждой точке интервала  называется *дифференцируемой* в этом интервале.

Значение производной функции  в точке  обозначается одним из символов: , , , .

*Основные правила дифференцирования:*

,

,

;

,

, , где *с*=*const*.

*Производная сложной и обратной функций*

*Теорема*. Если функция  имеет производную в точке *x*, а функция  − в точке . Тогда сложная функция  также имеет производную в точке *х*, которая находится по формуле

.

Итак, для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Пусть  и  - взаимно обратные функции.

*Терема*. Если функция  строго монотонная на интервале  и имеет неравную нулю производную  в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция  также имеет производную  в соответствующей точке, определяемую равенством  или .

*Производные основных элементарных функций*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *с*=*const*; | | |
|  | , (где ); в частности; | | |
|  | , ; в частности ; | | |
|  | , ; в частности ; | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

*Дифференцирование неявных функций*

Если неявная функция задан уравнением , то для нахождения производной  нет необходимости разрешать уравнение относительно *у*. Достаточно продифференцировать это уравнение по *х*, рассматривая при этом *у* как функцию от *х*, а затем полученное уравнение разрешить относительно .

*Дифференцирование параметрически заданных функций*

Пусть зависимость между аргументом *х* и функцией *у* задана параметрически в виде двух уравнений  где *t* – параметр.

Тогда производная функции находится по формуле .

*Логарифмическое дифференцирование*

При нахождении производных от показательно-степенной функции , а также других громких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

*Логарифмической производной* от функции  называется производная от логарифма этой функции: .

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции :

.

*Дифференциалом функции*  в точке *х* называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается , или : .

Так как , то , тогда формула дифференциала примет вид: 

Итак, дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной.

*Основные теоремы о дифференциалах*

,

,

.

Дифференциал сложной функции можно найти по формуле .

*Применение дифференциала к приближенным вычислениям*

Для вычисления приближенных значений функций используется формула:

.

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции  в точке  по известному значению этой функции и ее производной в точке .

Производные и дифференциалы высших порядков

Производная  от функции  называется также *производной первого порядка.*

Производная от функции , если она существует, называется *производной второго порядка* от функции (или второй производной) и обозначается  или , или  т.е. 

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается  или , или . Итак, .

*Производной n-го порядка* (или *n*-й производной) называется производная от производной  порядка и обозначается  или ..*.*

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках.

*Производные высших порядков неявно заданной функции*

Пусть функция  задана неявно в виде уравнения .

Продифференцировав это уравнение по *х* и, разрешив его относительно , найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по *х* первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут . Подставляя уже найденное значение  в выражение второй производной, выразим  через .

*Производные* *высших порядков от функций, заданных параметрически*

Из определения второй производной следует, что вторая производная вычисляется по формуле:  или .

Аналогично получаем для третей и четвертой производной:

, .

*Дифференциалы высших порядков.* Дифференциал от дифференциала функции  называется ее вторым дифференциалом и обозначается  или .

Итак, по определению  или . Аналогично определяется дифференциал третьего порядка:  или .

Дифференциал *n*-го порядка, есть дифференциал от дифференциала -го порядка:  или .

*Теорема Ферма*. Пусть функция дифференцируема на интервале  и достигает наибольшего или наименьшего значения в точке . Тогда производная функции в этой точке равна нулю, т.е. *.*

*Теорема Ролля*. Пусть функция непрерывна на отрезке ,дифференцируема на интервале  и принимает на концах отрезка равные значения . Тогда существует, по крайней мере, одна точка , в которой производная  обращается в нуль, т.е. **.

*Теорема Лагранжа*. Пусть функция непрерывна на отрезке  и дифференцируема на интервале . Тогда найдется хотя бы одна точка , что выполняется равенство .

*Следствие 1*. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

*Следствие 2*. Если две функции имею равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

*Теорема Коши*. Пусть функции  и  непрерывны на отрезке  и дифференцируемы на интервале ,причем  для всех . Тогда найдется хотя бы одна точка  такая, что выполняется равенство

.

*Теорема. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида *. Пусть функции  и  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  и обращаются в нуль в этой точке: . Пусть  в окрестности точки . Если существует предел , то

.

*Теорема. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида* . Пусть функции  и  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  (кроме, бытьможет, самой точки), в этой окрестности , . Если существует предел , то

.

Если  всвою очередь представляет собой неопределенность вида  или , то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции  и ) можно применять второй раз и т. д.

*Раскрытие неопределенностей различных видов.* Неопределенности вида  и , называются основными. Неопределенности вида , , , ,  сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть ,  при . Тогда можно применить следующие преобразования:

, или .

2. Пусть ,  при . Тогда можно поступить так:

.

3. Пусть или , , или , , или , , при .

Для нахождения предела вида  удобно сначала прологарифмировать выражение .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти , если: а) ; б) .

*Решение*:

а) Преобразуем функции к виду **.

Отсюда, используя таблицу производных, получим



.

б) Воспользуемся формулой для производной произведения:



.

***Задача 2***. Найти производную функции .

*Решение*:

Данная функция сложная. Представим ее в виде цепочки простых функций

, , , .

Найдем производные этих простых функций

, , , .

По правилу дифференцирования сложной функции получаем



.

***Задача 3***. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции: а) ; б) .

*Решение*:

а) Данная функции является композицией двух имеющих производные функций и . Так как , а , то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:



б) Функция – композиция функции  и , откуда 

Функция , в свою очередь, является композицией двух функций  и , поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

.

Отсюда окончательно .

***Задача 4***. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную  для функции .

*Решение*:

Обратная функция  имеет производную .

Следовательно, .

***Задача 5***. Найти производную функции, заданную уравнением .

*Решение*:

Функция задана неявно. Дифференцируем уравнение по *х*:











.

***Задача 6***. Найти производную неявно заданной функции *у*: *.*

*Решение*:

Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что – есть функция от (поэтому, например, ), получим:



или .

Отсюда находим :



или ,

т.е. .

***Задача 7***. Пусть  найти .

*Решение*:

, .

Следовательно, .

***Задача 8***. Найти производную  функции, заданной параметрически:

**

*Решение*:

Производная функции  находится по формуле , откуда в нашем случае .

***Задача 9***. Найти производную функции .

*Решение*:

Логарифмируем функцию:

,

.

Дифференцируем это равенство по *х*:

.

Выражаем : .

***Задача 10***. Используя логарифмическую производную, найти производные функции: 1) ; 2) .

*Решение*:

1. Прологарифмируем обе части равенства **. Тогда ,

т.е. .

Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой – производную произведения:

, 

или . Отсюда **

Учитывая, что **, получаем: **.

2) Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда: .

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим: ,

Или .

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:



или  , откуда ,

т.е. .

***Задача 11***. Найти дифференциал функции .

*Решение*:

Так как , то в данном случае ** .

***Задача 12***. Найти дифференциал функции .

*Решение*:

.

***Задача 13***. Найти приближенное значение приращения функции  при  и .

*Решение*:

Применяя формулу , получим

.

. Итак, .

***Задача 14***. Найти приращение и дифференциал функции  в точке .

*Решение*:

Сначала найдем приращение  в общем виде:





.

Из полученного выражения для приращения видно, что его линейная часть в произвольной точке  равна .

Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен

,

или, в более привычной записи, .

Второе слагаемое в полученной записи для  т.е. , есть бесконечно малая более высокого чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти *dy* и сразу (без вычисления ) по формуле , откуда *.*

Теперь найдем и в точке , если :

,

.

***Задача 15***. Вычислить приближенно 

*Решение*:

Аргумент функции , тогда , а .

Приближенное значение функции  найдем по формуле

,

,

.

***Задача 16***. Вычислить приближенно: 1) , 2) .

*Решение*:

1) Воспользуемся приближенной формулой **.

Тогда, подставляя , получим .

Полагая здесь , найдем .

Таким образом, .

2) Учитывая, что , , получим

, т.е. .

Окончательно .

***Задача 17***. Записать уравнение касательной к кривой  в точке с абсциссой .

*Решение*:

Ордината точки касания .

В любой точке . В точке касания . Поэтому имеем уравнение касательной (по точке  и угловому коэффициенту ):

, .

***Задача 18***. Написать уравнение касательной и нормали к параболе  в точке .

*Решение*:

Найдем  как производную неявной функции: , т.е. . Откуда . Значит, . Отсюда получаем уравнение касательной в точке М: , т.е. .

Найдем уравнение нормали: , т.е. 

***Задача 19***. Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы  параллельна прямой .

*Решение*:

Угловой коэффициент данной прямой равен , поэтому производная к кривой в искомой точке  также равна , т.е. , тогда .

Отсюда получаем , или .

***Задача 20***. Найти угол, под которым пересекаются кривые  и .

*Решение*:

Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим  во второе уравнение: .

Пусть , тогда

,

,

,

, .

Тогда , отсюда .

Таким образом, имеем две точки пересечения  и .

Найдем угол  пересечения кривых в точке , предварительно вычислив  и  из уравнений

 и .

,

.

Теперь окончательно найдем: .

Найдем угол  пересечения кривых в точке , предварительно вычислив  и  из уравнений  и .

,

.

Теперь окончательно найдем: .

***Задача 21***. Найти , где 

*Решение*:

Последовательно находим:

, ,

.

***Задача 22***. Найти , если .

*Решение*:

Дифференцируем уравнение по *х* найдем первую производную:

, , .

Далее найдем вторую производную:

,

, т.к. .

Находим третью производную:

.

***Задача 23***. *Найти , если .*

*Решение*:

Последовательно находим:



***Задача 24***. Найти , если  и , *t* – независимая переменная.

*Решение*:

*1-й способ*.

, ,

, .

Далее используя формулу , получим



*2-й способ*.

 и .

Следовательно, . Тогда по формуле , получаем

, т.е. .

***Задача 25***. Найти ,  и  для функции .

*Решение*:

Поскольку , тогда ,

,

.

***Задача 26***. Найти  и , если .

*Решение*:

Имеем равенство *,* откуда *.*

Продифференцировав обе части предыдущего равенства, получим

,

откуда

,



***Задача 27***. Найти  для функции, заданной параметрически 

*Решение*:

Найдем первую производную данной функции по формуле .

, , тогда .

Найдем вторую производную по формуле .

, тогда .

***Задача 28***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 29***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 30***. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) ; 2) .

*Решение*:

1) Поскольку  и  стремятся к бесконечности при , то в данном случае имеет неопределенность вида .

Применяя правило Лопиталя, получим



.

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) , поэтому имеет неопределенность вида . Воспользуемся правилом Лопиталя:



.

***Задача 31***. Найти.

*Решение*:



.

***Задача 32***. Найти .

*Решение*:

.

***Задача 33***. Найти .

*Решение*:



.

***Задача 34***. Найти пределы: 1) ; 2) .

*Решение*:

1) Здесь имеет место неопределенность вида , которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности ; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:



.

2) Имеем определенность . Сведем ее к неопределенности , приведя дроби к общему знаменателю:



.

***Задача 35***. Найти .

*Решение*:

. Пусть . Логарифмируем это выражение:

 и находим предел



,

т.е. . Отсюда , и .

***Задача 36***. Найти пределы: 1) ; 2) .

*Решение*:

1) В этом случае имеем неопределенность вида . Неопределенности этого вида, также и неопределенности вида , , можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Итак, обозначим . Тогда 

Таким образом, , откуда , т.е. .

2) Здесь неопределенность вида . Обозначив , найдем :.

Отсюда , т.е. .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Найти производные указанных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 2***. Найти производную данной функции в точке :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  |  |

***Задание 3***. Найти производные функций:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

***Задание 4***. Найти производную функции у, заданной неявно:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 5***. Найти в точке , если **.

***Задание 6***. Найти  для заданных параметрических функций :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 7***. Найти производные:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 8***. Найти дифференциал функции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 9***. Найти приращение и дифференциал функции в общем виде, а также в точке , если известно .

***Задание 10***. Вычислить приближенно:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |

***Задание 11***.Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке .

***Задание 12***. В какой точке касательная к кривой  параллельна прямой .

***Задание 13***. Найти углы, под которыми пересекаются кривые  и .

***Задание 14***. Найти производные указанных порядков для следующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 15***. Найти ,  для функции .

***Задание 16***. Найти  и , если:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 17***. Найти производные указанных порядков для функции, заданной параметрически: .

***Задание 18***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 19*** Найти пределы: а)  б)  .

***Задание 20***.Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) , б) .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение производной.
2. Сформулируйте основные правила производной.
3. Дайте определение производной сложной функции.
4. Как найти производную функции заданной параметрически.
5. Дайте определение дифференциала функции.
6. Сформулируйте теоремы о дифференциалах.
7. Запишите формулу для приближенного вычисления функции.
8. Сформулируйте определение производной второго порядка.
9. Приведите обозначения производных высших порядков.
10. В чем состоит механический смысл производной второго порядка?
11. Как вычислить производную второго, третьего порядков неявно заданной функции?
12. Как вычислить производную второго, третьего порядков параметрически заданной функции?
13. Дайте определение дифференциала второго, третьего порядка.
14. Запишите формулу дифференциала n-го порядка.
15. Обосновать инвариантность формы второго дифференциала.
16. Сформулируйте теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши.
17. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенностей .
18. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенностей .

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти производные указанных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 2***. Найти производную данной функции в точке :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  |  |

***Задание 3***. Найти производные функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 4***. Найти производную функции у, заданной неявно:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 5***. Найти  для заданных параметрических функций :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 6***. Найти производные: а) , б) .

***Задание 7***. Найти дифференциал функции: а) , б) .

***Задание 8***. Найти приращение и дифференциал функции в общем виде, а также в точке , если известно .

***Задание 9***. Вычислить приближенно .

***Задание 10***.Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке .

***Задание 11***. В какой точке касательная к кривой  параллельна прямой .

***Задание 12***. Найти производные указанных порядков для следующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 13***. Найти ,  функции .

***Задание 14***. Найти  и , если:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 15***. Найти производные указанных порядков для функции, заданной параметрически: 

***Задание 16***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 17***. Найти пределы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 18***.Найти предел , используя правило Лопиталя.

**Практическое занятие 5.**

**Тема: Применение производной при исследовании функций**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Теорема* (*необходимые условия*). Если дифференцируемая на интервале  функция  возрастает (убывает), то  () для .

*Теорема* (*достаточные условия*). Если функция  дифференцируема на интервале  и  () для , то эта функция возрастает (убывает) на этом интервале.

*Экстремумы функции.* Точка  называется *точкой максимума* (*минимума*), если существует такая -окрестность точки , что для всех  из этой окрестности выполняется неравенство .

Значение функции в точках максимума (минимума) называются *максимумом* (*минимумом*) *функции*.

Максимум (минимум) функции называется *экстремумом функции*.

Функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения.

*Теорема* *Ферма - необходимое условие экстремума*. Если дифференцируемая функция  имеет экстремум в точке , то ее производная в этой точке равна нулю: .

*Теорема* (*Достаточные условия экстремума*). Если непрерывная функция  дифференцируема в некоторой -окрестности критической точки  и при переходе через нее (слева на право) производная  меняет знак с плюса на минус, то  – точка максимума; с минуса на плюс, то  – точка минимума.

*Терема* (*Достаточный признак существования экстремума*). Если в точке  первая производная функции  равна нулю , вторая производная в этой же точке  существует и отлична от нуля , то при  в точке  функция имеет максимум, а при - минимум.

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Приведем *правило исследования функции на экстремум*:

1) найти критические точки функции ;

2) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

3) исследовать знак производной  слева и справ от каждой из выбранных критических точек;

4) в соответствии с теоремой 2 (достаточные условия экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

*Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.* Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на :

1) найти критические точки функции на интервале ;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

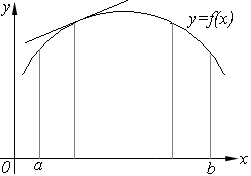
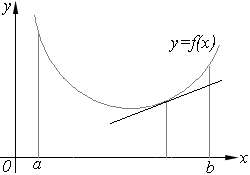
3) вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. в точках , .

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

*Замечание 1*. Если функция на отрезке имеет лишь одну критическую точку и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение.

*Замечание 2*. Если функция на отрезке не имеет критических точек, то это означает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, свое наибольшее значение (М) функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее (m) – на другом.

*Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.* Функция  называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) на интервале , если график этой функции  расположен выше (ниже) касательной, проведенной в любой точке.

Точка графика непрерывной функции , отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

*Теорема* (*Достаточное условие выпуклости вверх* (*вниз*))*.* Если функция  во всех точках интервала  имеет отрицательную вторую производную, т.е. , то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же   - график выпуклый вниз.

*Теорема* (*Необходимое условие точки перегиба*) Если  – точка перегиба функции , то в этой точке вторая производная функции либо равна нулю (), либо не существует.

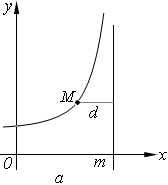
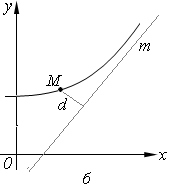
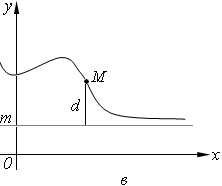
Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками 2-го рода.*

*Теорема* (*Достаточные условие* *существования точек перегиба*).

1. Если вторая производная  при переходе через точку , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика является точкой перегиба.

2. Если в точке  функция  имеет производные до третьего порядка включительно, тогда если , а , то  - точка перегиба этой функции.

*Асимптоты графика функции.* Прямая, линия *m* называется *асимптотой* графика функции , если расстояние *d* от точки *М*, лежащей на этом графике, до прямой *m* стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по графику.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая называется *вертикальной асимптотой* графика функции  если  или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, т.е. , 

Прямая  называется *наклонной асимптотой* графика функции , где , 

При  имеет место уравнение прямой , которая является *горизонтальной асимптотой* графика функции

*Общая схема исследования функции и построения графика:* При исследовании функции  и построении графика целесообразно пользоваться следующей схемой:

1. найти область определения функции;
2. исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;
3. найти точки пересечения графика с осями координат;
4. найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки на которых  или );
5. найти асимптоты графика функции;
6. найти интервалы монотонности;
7. найти экстремумы функции;
8. найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;
9. на основании проведенного исследования построить график функции.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Исследовать функцию  на монотонность.

*Решение*:

Функция определена на всей числовой оси, т.е. .

Найдем производную функции и приравняем ее нулю:

.

,

.

Имеем три интервала. Проверяем знаки производной на каждом из интервалов



Итак,

 при ,

 при .

*Ответ*: функция возрастает на интервалах  и ; убывает на интервале .

***Задача 2***. Найти интервалы возрастания и убывания функции

.

*Решение*:

Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна

*.*

Функция  возрастает и только тогда, когда , т.е. , откуда , .

Аналогично, данная функция убывает в точности когда , т.е. , откуда .

Таким образом, функция  возрастает на интервалах  и , а убывает на интервале .

***Задача 3***. Найти экстремум функции .

*Решение*:

. Находим производную функции .

При  производная не существует. При  производная равна нулю.



Следовательно,  - точка максимума, ,

 - точка минимума, .

***Задача 4***. Найти экстремумы функции .

*Решение*:

Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем *.*

Критические точки . Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для чего найдем  и :

.

Поскольку , а , то  - точка локального максимума, причем .

Аналогично, так как , а , то  - точка локального минимума, а .

***Задача 5***. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции .

*Решение*:

Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительности оси. Находим вторую производную: .

Отсюда получим: функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда , т.е. , или .

Функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда , т.е.

 .

Таким образом, функция выпукла вверх на , выпукла в низ на  и на .

Точки  и  являются точками перегиба данной функции.

***Задача 6***. Найти асимптоты графика функции .

*Решение*:

Функция непрерывна всюду, кроме точки , в которой она терпит разрыв второго рода, причем

, .

Отсюда следует, что прямая  - вертикальная асимптота и других вертикальных асимптоты нет.

Проверим, есть ли  графика функции наклонные асимптоты. Находим

,

откуда .

Таким образом, прямая  - наклонная асимптота графика функции при . Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при .

Поскольку угловой коэффициент *k* наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот.

***Задача 7****.* Найти наибольшее и наименьшее значения функции  на отрезке .

*Решение*:

Найдем критические точки данной функции:

,





, .

Находим , , , .

Итак,  в точке ,  в точке .

***Задача 8****.* Найти наименьшее и наибольшее значения функции  на отрезке .

*Решение*:

Находим критические точки: ,

Если , то , .

Если , то , если же , то .

Из всех найденных критических точек только  и  принадлежат отрезку  .

Вычислим значения данной функции при , , :

,

,

.

Следовательно, наибольшего значения на отрезке  данная функция достигает в точке : , а наименьшего – в точках , : , .

***Задача 9***. Провести полное исследование функции  и построить ее график.

*Решение*:

Воспользуемся общей схемой исследования функции.

1. Областью определения функции является множество

.

2. Ордината точки графика  при ,  при .

3. Точки пересечения графика данной функции с осями координат:

 и .

4. Находим, что  - вертикальная асимптота, причем:

, .

Находим наклонные асимптоты: ,

.

Таким образом, существует единственная наклонная асимптота .

5. Исследуем функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум:



Из  следует , откуда , . В интервале  .

функция возрастает, а в интервале  , функция убывает.

Поэтому функция в точке  имеет локальный максимум: .

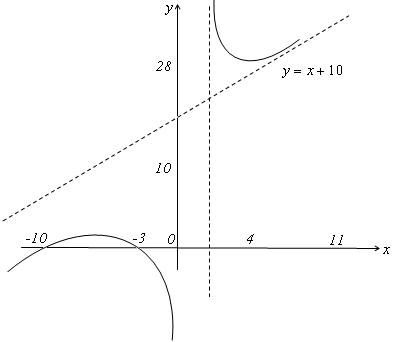
В интервале  , следовательно, функция убывает на этом интервале; в  , т.е. функция возрастает.

В точке  имеем локальный минимум: .

6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем 

Очевидно, что в интервале , и в этом интервале кривая выпукла; в , т.е. в этом интервале кривая вогнута. Так как при  функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

7. Строим график функции



***Задача 10****.* Провести полное исследование функции  и построить ее график.

*Решение*:

Воспользуемся общей схемой исследования функции.

1. Область определения функции .

2. Так как  при , график функции проходит через начало координат.

3. Функция принимает положительные значения в интервале  и отрицательные в интервале .

4. Вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты:

Получаем горизонтальную асимптоту .

5. Так как , то функция нечетна и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Исследуем функцию на монотонность: .

Если , то , откуда , .

Эти точки разбивают числовую ось на три интервала:

в  , и функция в этом интервале убывает;

в  и функция возрастает;

в   и функция в этом интервале убывает.

В точке  имеет минимум: ,

а в точке  - максимум: .

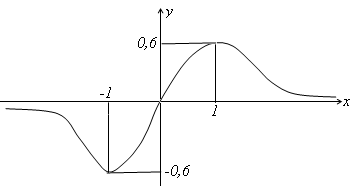
7. Исследуем свойства функции, связанные со второй производной:



Если , то , откуда , , . В интервале  , т.е кривая выпукла в этом интервале; в  , т.е кривая вогнута; в  , кривая выпукла;  , кривая вогнута. Так как в точках ,  вторя производная меняет знак, то при этих значениях *х* на графике получаем точки перегиба, ординату которых:

, .

8. Полученные данные позволяют построить график функции:



2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1***. Найти интервалы возрастания и убывания функции **.

***Задание 2***. Найти экстремумы функции .

***Задание 3***. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции .

***Задание 4***. Найти асимптоты графика функции .

***Задание 5***. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  на отрезке :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 6***. Провести полное исследование функции и построить ее график:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 7****.* Провести полное исследование функции и построить ее график:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте определения локального максимума и минимума.
2. Сформулируйте теоремы о необходимом и достаточном условии экстремума функции.
3. Приведите схему исследования функции на экстремум.
4. Приведите схему исследования функции на монотонность.
5. Сформулируйте определение наибольшего и наименьшего значения функции.
6. Приведите схему нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
7. сформулируйте определение выпуклости функции.
8. Сформулируйте теорему об условиях направленности выпуклости функции вверх, вниз.
9. Дайте определение точки перегиба.
10. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования точек перегиба.
11. Приведите определение вертикальной, наклонной и горизонтальной асимптот графика функции.
12. Приведите схему полного исследования функции.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1***. Найти интервалы возрастания и убывания функции **.

***Задание 2***. Найти экстремумы функции .

***Задание 3***. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции **.

***Задание 4***. Найти асимптоты графика функции **.

***Задание 5***. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  на отрезке : а) , , б) , .

***Задание 6***. Провести полное исследование функции и построить ее график:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | . |

***Задание 7****.* Провести полное исследование функции и построить ее график:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | . |

**Практическое занятие 6.**

**Тема: Производные и дифференциалы функций нескольких переменных**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Переменная *z* называется *функцией двух переменных* *х* и *у*, если каждой паре значений двух независимых друг от друга переменных величин *х* и *у* из некоторой области *D* соответствует определенное значение *z*.

Обозначают: , ,  и т.д.

Число *А* называется пределом функции  в точке , если для любого  (сколь угодно малого) найдется число  такое, что для всех , отличныx от  и отстоящих от  меньше, чем на δ, выполняется неравенство . Обозначают:

, , , где .

*Теорема* (*о пределах*). Пусть  и  - две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки  и , .Тогда

1) ;

2) ;

3) , ;

4) , .

Функция  называется непрерывной в точке , если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1)  определена в некоторой окрестности точки ,

2) имеет предел в этой точке: ,

3) этот предел равен значению функции в этой точке: .

Если функция  не определена в точке , или ,  называется *точкой разрыва*.

*Частными приращениями* функции  по независимым переменным х и у называются разности

, .

*Полным приращением функции* , соответствующим приращениям аргументов , называется разность

.

Заметим, что в общем случае .

*Частной производной* функции  по переменным *х* и *у* называется предел отношения соответствующего частного приращения  или  к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю: , .

Приняты также обозначения: , , , , , , (аналогично по другой переменной).

Пусть функция  имеет непрерывные частные производные первого порядка  и . Их можно рассматривать как функции от . Тогда эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*.

Приняты обозначения:

 - вторая частная производная по *х*;

 - вторая частная производная по *у*;

 - смешанные частные производные второго порядка.

*Теорема* *Шварца*. Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка, т.е. для 

.

*Теорема* (*необходимое условие дифференцируемости функции*). Если  дифференцируема в точке , то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные  и , причем:  и .

Тогда формула *полного дифференциала* примет вид:

 или  или ,

где ,  - *частные дифференциалы функции* .

*Теорема* (*достаточное условие дифференцируемости функции*). Если  имеет непрерывные частные производные  и  в точке , то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой: .

Пусть функция  имеет непрерывные частные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле  и он равен .

Символически это записывается так: .

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка: 

или *n*-го порядка: .

*Теорема*. Если дифференцируемая в точке  функция и ,  - дифференцируемые функции независимой переменной *t*, то производная сложной функции  вычисляется по формуле:



*Частный случай*: Если *t* совпадает с одним из аргументов, скажем, , то

 - *формулой полной производной*.

Производная сложной функции *z* по каждой независимой переменной (*u* и *v*) равна сумме произведений частных производных этой функции *z* по ее промежуточным переменным (*х* и *у*) на их производные по соответствующей независимой переменной (*u* и *v*):  и .

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Дифференциал сложной функции *z=z(x, y),* где , , можно получить, если в формуле дифференциала 

заменить  и .

В результате подстановки и перегруппировки членов при *du* и *dv* приходим к формуле ,

которая называется *инвариантностью* формы первого дифференциала.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

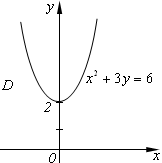
***Задача 1.*** Найти область определения функции .

*Решение*:

Логарифмическая функция определена только при положительном значение аргумента, поэтому , или .

Значит, границей области определения , или ,

т.е. парабола.



Область определения данной функции состоит из внешних точек параболы.

***Задача 2.*** Найти частные производные функции .

*Решение*:



.



.

***Задача 3.*** Найти частные производные и частные дифференциалы функции .

*Решение:*

Вначале найдём частные производные функции, используя формулу дифференцирования сложной функции одной переменной:

,

.

Теперь находим частные дифференциалы:

,

.

***Задача 4.*** Вычислить значения частных производных , ,  для данной функции  в точке  с точностью до двух знаков после запятой.

*Решение*:

Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке :

, ,

, ,

, .

***Задача 5.*** Найти полный дифференциал функции 

*Решение*:

Находим частные производные данной функции:





Полный дифференциал функции будет равен: 

***Задача 6.*** Вычислить значение производной сложной функции , где , , при  с точностью до двух знаков после запятой.

*Решение:*

Значение производной сложной функции будем искать в виде:



Тогда .

При  получаем, что , 



***Задача 7***. Найти частные производные функции z, заданной уравнением .

*Решение*:

.

, , .

По формулам ,  имеем:

, .

***Задача 8***. Найти , если неявная функция  задана уравнением .

*Решение*:

Здесь .

, .

Отсюда , т.е. .

***Задача 9***. Вычислить значения частных производных функции , заданной неявно уравнением

,

в точке  с точностью до двух знаков после запятой.

*Решение*:

В данном случае

,

поэтому

, , .

Далее, по формулам 

находим частные производные 

Вычисляем значения  и  в точке :



***Задача 10.*** Написать уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения  в точке .

*Решение*:

Находим частные производные и их значения в точке :

, ,

, .

Получаем уравнение касательной плоскости:

 или .

Уравнение нормали: .

***Задача 11.*** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S:  в точке .

*Решение*:

Находим частные производные: 

Подставляя в полученные выражения координаты точки , вычисляем координаты вектора , перпендикулярного к поверхности S в данной точке:



Следовательно, касательная плоскость имеет уравнение

 или , а уравнение нормали запишется в виде 

***Задача 12***. Найти вторые частные производные функции . Убедитесь в том, что .

*Решение*:

Вначале находим первые частные производные данной функции:

,

.

Дифференцируя каждую из полученных производных по *х* и по *у*, находим вторые частные производные данной функции:

,

,

,

.

Как видно, смешанные частные производные  и  равны.

***Задача 13***. Проверить, удовлетворяет ли функция  уравнению .

*Решение:*

Находим частные производные первого и второго порядка:





Подставляем полученные значения уравнения производных в левую часть исходного уравнения: 

Тогда в первой части уравнения имеем 

Сравнивая полученные результаты, видим, что данная функция не удовлетворяет исходному уравнению.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1.*** Найти область определения указанных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 2.*** Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |
|  | , |  | , |

***Задание 3***. Вычислить значения частных производных , ,  для данной функции  в точке  с точностью до двух знаков после запятой.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , , |
|  | , , |
|  | , , |

***Задание 4***. Найти полные дифференциалы функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |

***Задание 5***. Вычислить значения производной сложной функции , где ,  при  с точностью до двух знаков после запятой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | , , , , |
|  | , , , , |
|  | , , , , |

***Задание 6***. Вычислить значения частных производных функции , заданной неявно в данной точке  с точностью до двух знаков после запятой:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 7***. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности *S* в точке :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Задание 8***. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедитесь в том, что .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Задание 9***. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция *u*:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение функции нескольких переменных.
2. Сформулируйте определение непрерывности функции двух переменных.
3. Что называется частной производной функции нескольких переменных?
4. Что называется полным дифференциалом?
5. Как найти производную сложной функции?
6. Запишите формулу дифференциалов высших порядков.
7. Как найти дифференциал сложной функции?
8. Как определяется производная от функции заданной неявно.
9. Запишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
10. Как определяется производная по направлению?
11. Что такое градиент функции?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1.*** Найти область определения указанных функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | . |

***Задание 2.*** Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | , |
|  | , |  | . |

***Задание 3***. Вычислить значения частных производных , ,  для данной функции  в точке  с точностью до двух знаков после запятой.

|  |  |
| --- | --- |
|  | , , |
|  | , , |

***Задание 4***. Найти полные дифференциалы функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | , |  | . |

***Задание 5***. Вычислить значения производной сложной функции , где ,  при  с точностью до двух знаков после запятой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | , , , , |
|  | , , , . |

***Задание 6***. Вычислить значения частных производных функции , заданной неявно в данной точке  с точностью до двух знаков после запятой:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

***Задание 7***. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности *S* в точке :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

***Задание 8***. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедитесь в том, что .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 9***. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция *u*:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**Практическое занятие 7.**

**Тема: Экстремум функции нескольких переменных**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть функция  определена в некоторой области D, точка .

Точка  называется *точкой максимума функции* , если существует такая -окрестность точки , что для каждой точки , отличной от , из этой окрестности выполняется неравенство

.

Точка  называется *точкой минимума функции* , если существует такая -окрестность точки , что для каждой точки , отличной от , из этой окрестности выполняется неравенство

.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции.

Максимум и минимум функции называют ее *экстремумами*.

*Теорема 1 (необходимые условия экстремума).* Если в точке  дифференцируемая функция  имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:



Точка, в которой частные производные первого порядка функции  равны нулю, т.е. ,  называется *стационарной точкой* функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются *критическими точками*.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь.

*Теорема 2 (достаточные условия экстремума).* Пусть в стационарной точке  и некоторой ее окрестности функция  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке  значения

, , .

Обозначим

.

Тогда:

1) если  и , то точка  – точка максимума;

2) если  и , то точка  – точка минимума.

3) если , то функция в точке  экстремума не имеет.

4) если , то экстремум в точке  может быть, а может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. Найти экстремум функции .

*Решение*:

Найдем частные производные функции , .

Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:





Получили две стационарные точки  и .

Находим частные производные второго порядка данной функции:

, , .

В точке  имеем

, ,

.

Отсюда 

Так как , , то в точке  функция имеет локальный максимум: .

В точке  имеем

, ,

.

Отсюда . Можно заметить, что  при , ; при , .

Это значит, что в окрестности точки  функция z принимает как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, в точке  функция экстремума не имеет. Значение функции в этой точке равно нулю.

***Задача 2***. Исследовать на локальный экстремум функцию 

*Решение:*

Находим первые частные производные данной функции:



Приравнивая их нулю, получаем систему уравнений 

из которой определяем стационарные точки данной функции: 

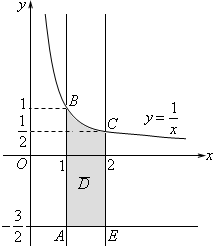
Выясним, какие из этих точек являются точками экстремума. Для этого вначале найдём вторые частные производные данной функции:



Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума, имеем: для точки , т.е. экстремума нет, для точки , т.е. экстремума нет, для точки  т.е. экстремума нет, для точки  т.е. имеем точку локального минимума функции, в которой 

***Задача 3***. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  в замкнутой области, ограниченной линиями: , , , .

*Решение*:



1. Найдем все критические точки:

, .





Решением системы являются точки , , ,. Ни одна из этих точек не принадлежит области .

2. Исследуем функцию *z* на границе области, состоящей из участков: *АВ*, *ВС*, *СЕ*, *ЕА*.

На участке АВ: , тогда , где .

, .

, , .

На участке ВС: , тогда , где .

, , .

, .

На участке СЕ: , тогда , где .

, .

; .

На участке АЕ: , тогда , где .

, .

; .

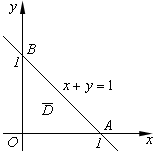
3. Сравнивая полученные результаты, имеем:

, .

***Задача 4***. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  в области D, ограниченной линиями .

*Решение:*

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области D, т.е. внутри треугольника ОАВ*.*



Имеем: 

Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку . Она лежит вне области D, следовательно, при решении задачи мы ее не учитываем. Исследуем значения функции на границе области D*.*

На стороне ОА  треугольника OABфункция zимеет вид .Стационарных точек на отрезке OAнет, так как . В точках O и A соответственно , .

На стороне ОВ  треугольника функция , . Отсюда получаем, что . Таким образом, точка  не принадлежит области *.* Значение функции в точке B .

Находим наибольшее и наименьшее значения на стороне АВ: . Здесь , , тогда . Следовательно, , т.е. стационарная точка  принадлежит границе области D. Значение функции в ней .

Сравнивая все полученные значения функции, видим, что

****,  ****.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Задание 1.*** Исследовать на экстремум следующие функции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 2***. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  в области D, ограниченной заданными линиями:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение экстремума функции нескольких переменных.
2. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума.
3. Приведите схему определения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Задание 1.*** Исследовать на экстремум следующие функции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

***Задание 2***. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  в области D, ограниченной заданными линиями:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

## Список рекомендуемой литературы

***Основная литература:***

1. [Шершнев В.Г.](http://znanium.com/catalog.php?item=booksearch&code=%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7#none) Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 288 с. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1008011.

2. [Шершнев В.Г.](http://znanium.com/catalog.php?item=booksearch&code=%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7#none) Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 164 с. – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/342089.

***Дополнительная литература:***

1. Антипова, И. А. Математический анализ. Ч. I : учеб. пособие / И.А. Антипова, И.И. Вайнштейн, Т.В. Зыкова [и др.]. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2018. - 196 с. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1032137.

2. Антипова, И. А. Математический анализ. Ч. II : учеб. пособие / И.А. Антипова, И.И. Вайнштейн, Т.В. Зыкова [и др.]. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2018. - 188 с. – Режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1032139.