|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | |  | | --- | | МИНОБРНАУКИ РОССИИ | | Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  высшего образования  **«МИРЭА – Российский технологический университет»**  **РТУ МИРЭА**  **Филиал РТУ МИРЭА в г. Ставрополе** | | |  | |
|  |

**Методические указания к практическим занятиям**

**и самостоятельной работе по дисциплине**

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

**для студентов направления подготовки:**

**09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

**Квалификация: бакалавр**

**Ставрополь**

Методические указания составлены в соответствии Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования и программой дисциплины «**Теория вероятностей и математическая статистика**» для студентов *по направлению подготовки* 09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

Составитель: Чекалова Л.А., к.п.н., доцент

Богушевич Е.В., к.э.н.

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| **Практическое занятие 1**. События и действия над событиями. Алгебра событий. | 4 |
| **Практическое занятие 2**. Классическое определение вероятности | 10 |
| **Практическое занятие 3**. Элементы комбинаторики | 12 |
| **Практическое занятие 4**. Применение формул комбинаторики к вычислению вероятностей | 20 |
| **Практическое занятие 5**. Применение основных теорем теории вероятностей. | 24 |
| **Практическое занятие 6**. Формула полной вероятности. Формула Байеса | 29 |
| **Практическое занятие 7**. Практическое применение формул Бернулли и предельных теорем в схеме Бернулли | 35 |
| **Практическое занятие 8**. Распределение вероятностей дискретных случайных величин | 43 |
| **Практическое занятие 9**. Интегральная функция распределения вероятностей случайной величины | 46 |
| **Практическое занятие 10**. Плотность распределения, определение числовых характеристик для непрерывных случайных величин | 50 |
| **Практическое занятие 11**. Определение числовых характеристик дискретных случайных величин | 56 |
| **Практическое занятие 12**. Практическое применение законов распределения случайных величин | 62 |
| **Практическое занятие 13**. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел | 74 |
| **Практическое занятие 14**. Определение числовых характеристик статистического распределения | 77 |
| **Практическое занятие 15**. Точечные и интервальные оценки параметров распределения | 85 |
| **Практическое занятие 16**. Статистическая обработка результатов наблюдений | 91 |
| **Список рекомендуемой литературы** | 101 |

**Практическое занятие 1.**

**Тема: События и действия над событиями.Алгебра событий**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Случайным событием**(или просто: **событием)**называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

Множество всех элементарных событий называется **пространством элементарных событий или пространством исходов** и обозначается через Ω.

Событие называется **достоверным***,* если оно обязательно наступит в результате данного опыта, обозначается через Ω *.*

Событие называется**невозможным**,если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта, обозначается через .

Два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте, т. е. не смогут произойти вместе в одном опыте. В противном случае события называются **совместными**.

Так, в примере 1.1 события *А*и *В*-несовместные, *А*и *Е*- совместные.

События называются **попарно-несовместными**, еслилюбые два из них несовместны.

Несколько событий образуют **полную группу**, еслиони попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

Несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**,если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т.е. все события имеют равные «шансы».

Введем основные операции над событиями; они полностью соответствуют основным операциям над множествами.

**Суммой событий** *А* и *В*называется событие ,состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т.е. или А, или В, или А и В вместе).

**Произведением событий** *А* и *В*называется событие ,состоящее в совместном наступлении этих событий (т.е. и А и Водновременно).

**Разностью событий** *А* и *В*называется событие ,происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие А,но не происходит событие В.

**Противоположным событию** *А*называется событие ,которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие *А*(т.е. означает, что событие *А*не наступило).

Событие *А* **влечет событие***В* (или *А* является частным случаем *В*), если из того, что происходит событие *А*, следует, что происходит событие *В*: записывают .

Если и , то события *А* и *В*называются **равными**: записывают .

События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью **диаграмм Эйлера-Венна**:достоверное событие Ω изображается прямоугольником; элементарные случайные события - точками прямоугольника; случайное событие - областью внутри него.

*Операции над событиями обладают следующими свойствами:*

1.  (переместительное).
2.  (распределительное).
3.  (сочетательное).
4. 
5. 
6. 
7. 
8. .
9.  (законы де Моргана)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. На десяти жетонах выбиты числа 1; 2; 3; ...; 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания:

а) {четное; нечетное},

б) {простое; 4; 6; 8; 9; 10},

в) {четное; 1; 3; 5},

г) (не более трех; не менее четырех}?

*Решение:*

Пространство элементарных событий , т.е. имеем 10 возможных исходов испытания.

В случае а) множество состоит из двух элементов: четное – числа 2, 4, 6, 8, 10 и нечетное – числа 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно, это множество отражает все возможные исходы испытания.

В случае б) – простое – означает числа 2, 3, 5, 7. Получаем множество  в котором не хватает числа 1. Следовательно, данное множество не указывает все возможные исходы испытания.

В случае в) четное – это числа 2, 4, 6, 8, 10. В совокупности с числами 1, 3, 5 – получим множество . И это множество не указывает все возможные исходы испытания.

В случае г) - не более трех – означает числа от 1 до 3, т.е. 1, 2, 3; не менее четырех – числа 4, 5, 6, 7, 8, 9,10. Следовательно имеем множество  - все возможные исходы испытания.

***Задача 2.*** Событие А означает, что хотя бы одна пуля при четырех выстрелах попадает в цель. Что означает событие ?

*Решение:*

Событие А означает, что ни одна из четырех пуль не попала в цель.

***Задача 3.*** Известно, что события А и В произошли, а собы­тие С не произошло. Определить, произошло или не произошло собы­тие .

*Решение*:

Используя таблицы операций над событиями, получим:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | В | С |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Значит, событие  произошло.

***Задача 4.*** Доказать, что .

*Доказательство*:

Воспользуемся тем, что событие (см. рис. 2). Тогда . Но событие , так как событие – достоверное. Таким образом, .

***Задача 5****.* Доказать формулу .

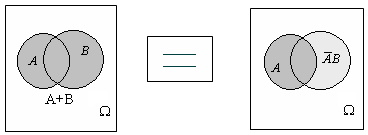
*Доказательство*:

Используя свойства операций, приведенные выше, получим:



Таким образом, сумму любых двух событий можно представить в виде суммы двух несовместимых событий.

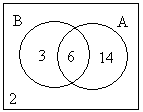
Геометрически доказательство выглядит так, как показано на рисунке:



***Задача 6***. Из 25 студентов группы 20 человек увлекаются спортом (событие А), 9 – музыкой (событие В), 6 – музыкой и спортом (событие АВ). Построим диаграмму Эйлера–Венна и покажем, что означают события ,, .

*Решение*:

Строим диаграмму Эйлера–Венна.



Круги обозначают события А и В, пересечение кругов – собы­тие АВ. Пересечению кругов соответствует число студентов, увле­кающихся музыкой и спортом, т.е. 6 человек. События и  означают соответственно, что 14 студентов увлекаются только спортом, а 3 – только музыкой. Значит, музыкой или спортом увлекаются 23 студента, и потому событие  означает, что только двое из студентов не имеют этих увлечений.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу.***

**1.1.** Укажите пространства элементарных событий для следую­щих испытаний:

а) производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10;

б) проводится турнирный футбольный матч между двумя коман­дами;

в) наудачу извлекается одна кость из полной игры домино.

Можно ли составить несколько пространств элементарных собы­тий для какого-нибудь из этих испытаний?

**1.2.** В каких из следующих примеров указаны все возможные ис­ходы испытания:

а) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;

б) выпадение (в указанном порядке) герба – герба, герба –цифры, цифры – цифры при двукратном подбрасывании монеты;

в) попадание, промах при одном выстреле;

г) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при однократном бросании кости?

**1.3.** Какие из следующих событий невозможные:

А – опаздывание московского экспресса в субботние дни;

В – появление 17 очков при бросании 3 игральных костей;

С – появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м;

Д – появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр;

Е – появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 3 числа при произвольном однократном наборе указанных цифр.

**1.4.** Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включи­тельно: делится на 10; делится на 11;

б) нарушение в работе: первого; второго мотора летящего са­молета;

в) попадание; промах при одном выстреле;

г) выигрыш; проигрыш в шахматной партии;

д) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: четным; кратным трем?

**1.5.** Укажите достоверные и невозможные события:

А – выплата 10 рублей четырьмя купюрами,

В – появление сразу 3 лайнеров над аэропортом,

С – попадание в мишень при 3 выстрелах,

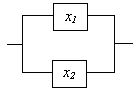
Д – появление в окошке счетчика трехзначного числа составленного из цифр 1, 2, 3 и кратного 5.

**Задание 2. *Решить задачу*.**

**2.1.** Из урны, содержащей шары белого, черного и синего цве­та, наудачу извлекается один шар. События А1 и А2 соответствен­но означают появление белого и черного шаров. Что означает со­бытие A1+А2?

**2.2.** Пусть А, В, С – три произвольных события. Выразите через них следующие события: а) произошли все три события; б) произошло только С; в) произошло хотя бы одно из событий; г) ни одного события не произошло; д) произошли А и В, но С не произошло; е) произошло одно из этих событий; ж) произошло не более двух событий.

**2.3.** Дана электрическая цепь с элементами х1 и х2. Если событие А1 – выход из строя элемента хl, событие А2 –выход из строя элемента х2, то что означает событие А1А2?



**2.4.** События Al, А2, А3 означают соответственно попадание в цель при первом, втором и третьем выстрелах, а события ,,означают соответственно промахи. Опишите событие: .

**2.5.** Если событие А1 – выигрыш по билету одной лотереи, А2 – выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события: 1) ; 2) ?

**Задание 3. *Решить задачу.***

**3.1.** Известно, что события А и В произошли, а событие С не произошло. Определите, произошли или не произошли следующие события: А+ВС; (А+В)С; ; ABC.

**3.2.** Используя таблицы операций над событиями, докажите тождества: ; ; .

**3.3.** Упростите выражения для событий: АВ, А+В, А+В+С, (А+В)С, если известно, что А⊂В.

**3.4.** Используя диаграммы Эйлера–Венна, дайте геометриче­скую интерпретацию событий: , , , .

**3.5.** Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A*i*(*i* = 1, 2, ..., n) заключается в том, что *i*-тая изготовленная им де­таль имеет дефект. Запишите событие, заключающееся в том, что: а) ни одна из деталей не имеет дефектов; б) только одна деталь имеет дефект; в) не более двух деталей имеют дефекты.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Что называют испытанием? Событием?
2. Какое событие называют случайным? Достоверным? Невозможным?
3. Какие события называют совместными, а какие несовместными?
4. Дайте определение суммы событий; произведения событий; разности событий.
5. Какое событие называют противоположным событию А?
6. Какие события называют равными?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу.***

**1.1.** Сколько элементарных событий содержит каждое из следую­щих случайных событий:

а) сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна двенадцати;

б) наудачу выбранная кость из полной игры домино – «дубль»;

в) число очков, выпавшее на верхней грани игрального кубика, нечетное;

г) наудачу вырванный листок из нового календаря соответст­вует тридцатому числу;

д) наудачу выбранное слово из множества А = {тор, куб, квад­рат, гипотенуза, событие, перпендикуляр, ромб} содержит не ме­нее двух гласных.

**1.2.** Какие из следующих событий достоверные:

А – два попадания при трех выстрелах,

В – выплата рубля семью монетами,

Д – наугад выбранное трехзначное число не больше 1000,

Е – наугад выбранное число составленное из цифр 1, 2, 3 без повторений, меньше 400?

**1.3.** Укажите, какие из следующих событий являются: 1) случай­ными, 2) достоверными, 3) невозможными:

а) выигрыш по одному билету автолотереи;

б) извлечение из урны цветного шара, если в ней находятся 3 синих и 5 красных шаров;

в) получение абитуриентом 25 баллов на вступительных экза­менах в институте при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибалльная система оценок;

г) извлечение «дубля» из полной игры в домино;

д) выпадение не более шести очков на верхней грани играль­ного кубика.

**1.4.** Пусть А, В, С – три произвольных события. Выразите через них следующие события: а) произошли все три события; б) произошло только С; в) произошло хотя бы одно из событий; г) ни одного события не произошло; д) произошли А и В, но С не произошло; е) произошло одно из этих событий; ж) произошло не более двух событий.

**1.5.** Для испытания, состоящего в двукратном броске играль­ного кубика, запишите все возможные исходы испытания, если элементы пространства элементарных событий S:

а) являются упорядоченными парами чисел m и n;

б) являются неупорядоченными парами чисел m и n;

в) являются суммами m и n.

Во всех трех случаях m и n выражают число очков, выпавших при каждом броске.

**Задание 2. *Решить задачу*.**

**2.1.** Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от1 до 100. Событие А – извлечение жетона, номер которого кратен двум, а событие В – извлечение жетона, номер которого кратен пяти. Что означают события: а) А+В; б) АВ?

**2.2.**Дана электрическая цепь с элементами х1 и х2. Событие А1 – выход из строя элемента хl событие А2 – выход из строя элемента х2. Что означает событие А1+А2?



**2.3.** Событие А означает появление шести очков на верхней гра­ни игрального кубика. Что означает событие ?

**2.4.** Событие А состоит в том, что хотя бы одна из имеющихся 15 электрических лампочек нестандартная. Что означает событие ?

**2.5.** События Al, А2, А3 означают соответственно попадание в цель при первом, втором и третьем выстрелах, а события ,,означают соответственно промахи. Опишите событие: .

**Задание 3. *Решить задачу.***

**3.1.** Доказать формулы: 1) ; 2) ; 3) .

**3.2.** Турист из пункта А в пункт В может попасть двумя дорогами. Обозначим события: А1 – он пошел первой дорогой, А2 – он пошел второй дорогой,

Из пункта В в пункт С ведут три дороги. Обозначим события: В1 – он пошел первой дорогой, В2 – он пошел второй дорогой, В3 – он пошел третьей дорогой.

Постройте события, состоящие в том, что:

1) от А до В он выбрал дорогу наугад, а от В до С пошел третьей дорогой;

2) от А до В он пошел первой дорогой, а от В до С - дорогой, выбранной наугад.

**3.3.** Докажите, что событие  достоверно.

**3.4.** Среди студентов, сдавших экзамен по теории вероятностей выбирают наудачу одного. Пусть событие А состоит в том, что выбранный окажется старше двадцати лет, событие В – в том, что выбранный получил «отлично» на экзамене, а событие С – что он живет в общежитии.

а) Опишите событие .

б) При каком условии имеет место равенство ABC = А?

в) При каком условии выполняется соотношение ?

г) Будет ли иметь место событие , если девятнадца­тилетний Саша Петров получил на экзамене отметку «отлично»?

**3.5.** Турист из пункта А в пункт В может попасть двумя дорогами. Обозначим события: А1 – он пошел первой дорогой, А2 – он пошел второй дорогой.

Из пункта В в пункт С ведут три дороги. Обозначим события: В1 – он пошел первой дорогой, В2 – он пошел второй дорогой, В3 – он пошел третьей дорогой.

Постройте события, состоящие в том, что:

1) от А до В он пошел не первой дорогой, а от В до С – не третьей;

2) он дошел от А до С.

**Практическое занятие 2.**

**Тема**: **Классическое определение вероятности**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Вероятностью события *А*называется отношение числа *m*случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу *n*случаев, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Из классического определения вероятности вытекают следующие *свойства*:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей, т.е.

.

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

.

3. Вероятность достоверного события равна 1, т.е.

.

4. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме частоты этих событий, т.е. если , то

.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Указания*. Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по формуле  могут быть выполнены по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Установите, являются ли исходы испытания несовместными и равновероятными.
3. Подсчитайте число всех возможных исходов испытания (n).
4. Сформулируйте событие, вероятность наступления которого необходимо найти.
5. Подсчитайте число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию (m).
6. По формуле  вычислите вероятность появления рассмат­риваемого события.

***Задача 1***. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

*Решение*:

Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев благоприятствующих событию А, равно числу всех возможных случаев, т.е.m = n = 10 и р(А)=1. В этом случае событие А – достоверное.

***Задача 2***. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

*Решение*:

В урне синих шаров нет, т.е. m = 0, n = 15. Следовательно  В данном случае событие А - невозможное.

***Задача 3.*** В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 синих. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

*Решение*:

Здесь m = 4, n = 12 и 

***Задача 4.*** Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных с помощью целых чисел от 1 до 35, наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что извлекается один билет. Так как билет вытягивается наудачу, то все исходы испыта­ния равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число воз­можных исходов испытания равно 35. Событие А означает, что номер взятого билета кратен трем. Этому событию благоприятству­ют 11 исходов испытания {3; 6; 9; ...; 33}. Следовательно, по фор­муле (1) искомая вероятность равна



2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. Решить задачу**

1. Найти вероятность того, что в наудачу написанном двузначном числе цифры разные.
2. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность то­го, что наудачу выбранное целое число является делителем чис­ла 30?
3. Какова вероятность того, что наудачу выбранный день из числа дней одного столетия обладает следующим свойством: число, номер месяца и последние две цифры года записаны с помощью од­ной из цифр 1, 2, …, 9?
4. Какова вероятность того, что число на вырванном науда­чу листке нового календаря: а) кратно пяти; б) равно 29, если в году 365 дней?
5. В коллекции 200 монет, из которых 25 монет XVIII века. Какова вероятность того, что наудачу выбранная монета датиро­вана XVIII веком?

**Задание 2. Решить задачу**

1. Какова вероятность того, что кость, наудачу извлеченная из полного набора домино, имеет сумму очков, равную пяти?
2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Определите вероятность того, что извлечен­ный наудачу кубик будет иметь ровно две окрашенные грани.
3. Монета бросается три раза подряд. Перечислите все воз­можные исходы этих трех последовательных бросаний (например, один из исходов может быть в виде ГЦГ, где Г – выпадение гер­ба, а Ц – цифры). Припишем всем исходам одну и ту же вероят­ность. Найдите вероятности следующих событий: а) число выпадений герба больше числа выпадений цифры; б) выпадает в точности два герба; в) результаты всех бросаний одинаковы.
4. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета – выигрыш по 50 руб., на десять билетов – выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов – выигрыш по 10 руб., на 165 билетов – выигрыш по 5 руб., на 400 билетов – выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 руб.?
5. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение события, благоприятствующего событию А.
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.
3. Сформулируйте и запишите свойства классической вероятности.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. Решить задачу**

1. В ящике имеются 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?
2. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры и набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
3. На одинаковых карточках в троичной системе счисления за­писаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточ­ка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содер­жит: а) не менее двух единиц; б) хотя бы одну двойку; в) один нуль?
4. Из полной игры лото наудачу извлекается один бочонок. На бочонках написаны числа от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что на извлеченном бочонке написано простое число?
5. На четырех карточках написаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на 3?

**Задание 2. Решить задачу**

1. В группе 6 юношей и 18 девушек. По жребию разыгрыва­ется один билет в театр. Какова вероятность того, что билет полу­чит девушка?
2. Игральная кость бросается дважды. Каждому из 36 эле­ментарных событий приписывается одна и та же вероятность. Най­дите вероятность того, что сумма очков равна n для n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
3. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара – белые?
4. В урне 20 шаров с номерами от 1 до 20. какова вероятность вынуть шар с номером 37?
5. Монета брошена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?

**Практическое занятие 3.**

**Тема**: **Элементы комбинаторики**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Правило умножения**. Если из некоторого конечного множества первый объект (элемент *х*) можно выбрать *n*1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент *у*) можно выбрать *n*2 способами, то оба объекта (*х* и *у*) в указанном порядке можно выбрать *n*1∙*n*2 способами.

**Правило суммы**. Если некоторый объект *х* можно выбрать n1 способами, а объект *у* можно выбрать *n*2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (*х* или *у*), можно выбрать *n*1 + *n*2 способами.

***Схема выбора без возвращений***

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

**Размещения** - это выборки, состоящие из *r* элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений из n элементов по *r* элементов обозначается символом  ивычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

или

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

где , , 

**Перестановки** – это выборки, состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из *n* элементов обозначается символом *Р*n и вычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| *Рn* = *n*! |  |

Формула следует из определения перестановки:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Сочетания** – это выборки, каждая из которых состоит из *r* элементов, взятых из данных *n* элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Число сочетаний из *n* элементов по *r* элементов обозначается символом  и вычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

или

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

***Схема выбора с возвращением***

Число всех **размещений** из *n*элементов по *r* с повторениями обозначается символом  и вычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Число всех **сочетаний** из n элементов по *r* с повторениями обозначается символом  и вычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Перестановки из *n* элементов данного множества называются **перестановками с повторениями** из *n* элементов обозначается символом и вычисляются по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Указание 1****.* Решение задач на вычисление числа размещений (с повторениями или без повторений), перестановок и сочетаний без повторений рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Подсчитайте число элементов n основного множества.
2. Подсчитайте число элементов r входящих в выборку (т.е. длину кортежа или мощность подмножества).
3. Выясните, упорядочены ли выборки.
4. При подсчете числа кортежей в случае размещений с повторениями пользуйтесь формулой  .
5. При подсчете числа кортежей в случае размещений без повторений пользуйтесь формулой , в частности, при n = r – формулой .
6. В случае сочетаний без повторений пользуйтесь формулой 

***Указание 2*.** При решении задач на перестановки и сочетания с повторениями рекомендуется:

1. Выяснить, идет ли в задаче речь о подсчете числа кортежей данного состава или о подсчете числа возможных составов кортежей.

2. В первом случае найти состав кортежа и воспользоваться формулой

 .

3. Во втором случае найти число n элементов основного множества, длину кортежа г и воспользоваться формулой 

***Задача 1.*** Даны *m*, *n*, *r*, *k* элементов. Вычислить: а)  и ; б)  и ; в) сравнить  и ;  и ;  и;  и , если *m*=4, *n*=7, *r*= 5, *k*=9.

*Решение:*

а) Число размещений из n элементов по m элементов ****** находим по формуле :

.

Число сочетаний из r элементов по k элементов ****** находим по формуле 

.

б) Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов ****** находим по формуле :

.

Число сочетаний с повторениями из r элементов по k элементов ****** находим по формуле 

.

в) При вычислении воспользуемся уже известными формулами:

, , ;

, , .

, , ;

, , .

***Задача 2.*** Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка?

*Решение:*

Каждый из студентов может получить любую из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно». Значит, рассматриваемое множество X состоит из трех различных элемен­тов. При этом порядок расстановки отметок существен, отметки могут повторяться, а общее число поставленных отметок равно четырем (например, «отлично», «хорошо», «отлично», «удовлетво­рительно».) Следовательно, необходимо составить размещения с повторениями из трех элементов по четыре. А это число равно

.

***Задача 3*.** Сколько всего семизначных телефонных номе­ров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

*Решение:*

Это задача о выборе и размещении по семи раз­личным местам семи из десяти различных цифр; поэтому число указанных телефонных номеров равно

.

***Задача 4.*** Сколько всего шестизначных четных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 7 и 9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется.

*Решение:*

Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа на 2 является делимость на 2 цифры разряда единиц этого числа. Поэтому из всех указанных цифр цифрой единиц искомого числа может быть только цифра 4. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом по­рядке. Следовательно, поставленная задача сводится к нахождению числа перестановок из пяти элементов.

Р5 = 5!=120.

***Задача 5.*** Сколькими способами можно расставить бе­лые фигуры (2 ладьи, 2 слона, 2 коня, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

*Решение:*

Рассматриваемые кортежи имеют длину 8 и состоят из элементов пяти видов. Состав кортежей имеет вид (2, 2, 2, 1, 1). Следовательно, число способов, которыми можно рас­ставить 8 фигур на первой линии шахматной доски, равно

.

***Задача 6.***Лифт, в которой находится восемь пассажи­ров, останавливается на шести этажах. Пассажиры выходят группами по одному, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти, если на каждом этаже может выйти только одна группа пассажиров, при этом порядок выхода пассажиров одной группы не имеет значения?

*Решение:*

Восемь пассажиров разбить на три группы соот­ветственно по одному, три и четыре человека можно  способами.

Выбрать три этажа из шести и распределить их среди трех резных групп можно  способами.

Следовательно, согласно правилу умножения, число всех спосо­бов выполнить условия задачи равно

.

***Задача 7.*** Сколько хорд можно провести через 6 точек, лежащих на одной окружности?

*Решение*:

Из множества, содержащего 6 различных эле­ментов, выбираются 2 элемента, так как хорда однозначно определяется двумя точками, лежащими на окружности. Порядок элементов роли не играет. Например, [АВ] и [ВА] – одна и та же хорда. Следовательно, необходимо найти число сочетаний из шести элементов по два, т.е. . Значит, можно провести  различных хорд.

***Задача 8.*** Между четырьмя игроками поровну распределяются 28 костей домино. Сколькими способами возможно подобное распределение?

*Решение*:

Первый игрок 7 костей может выбрать  - способами. Второй – из оставшихся 21-ой кости  - способами. Соответственно третий -  - способами и четвертый - - способами. По правилу произведения кости домино могут быть распределены

 - способами.

***Задача 9*.** В цветочном магазине продаются цветы шести сортов. Сколько можно составить различных букетов из десяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

*Решение*:

Рассматриваемое множество состоит из шести различных элементов, а кортежи имеют длину 10. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то число букетов равно числу сочетаний с повторениями из шести элемен­тов по десяти в каждом. Следовательно, можно составить

 различных букетов.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1.*Даны m, n, r, k элементов (см. табл. 1). Вычислить: а)  и ; б)  и ; в) сравнить  и ;  и .***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***m*** | ***n*** | ***r*** | ***k*** |  | ***№*** | ***m*** | ***n*** | ***r*** | ***k*** |
|  | 2 | 7 | 4 | 6 |  |  | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 9 | 10 | 10 | 22 |  |  | 5 | 10 | 5 | 8 |
|  | 7 | 8 | 2 | 8 |  |  | 10 | 36 | 15 | 36 |

**Задание 2. *Решить задачи:***

**2.1.** а) Сколько четырехзначных чисел можно образовать из не­четных цифр, если каждая из этих цифр может повторяться?

б) Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цеха (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются мужчины и женщины?

**2.2.** а) Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между четырьмя студентами?

б) В борьбе за призовые места на студенческой олимпиаде по информационным технологиям участвуют 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены первое и второе место?

**2.3.** а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

б) В электронной библиотеке имеется 10 статей по заданной тематике. Сколькими способами можно скопировать три статьи на диск?

**2.4.** а) В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

б) Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

**2.5.** а) Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

б) Имеется 5 компьютеров и 4 пользователя. Сколькими способами можно распределить пользователей по компьютерам, если каждому пользователю должен достаться компьютер и не разрешается работать двум пользователям за одним компьютером?

**Задание 3. *Решить задачи:***

**3.1.** а) Сколько слов, каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова «выборка»?

б) Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?

**3.2.** а) Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

б) Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «соединение»?

**3.3.** а) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному плоду. Сколь­кими способами это может быть сделано?

б) Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы 4 буквы «е» не стояли подряд?

**3.4.** а) Сколькими способами можно представить план застройки улицы десятью домами, среди которых три дома одного типа, пять другого и два третьего?

б) Сколько пар можно составить из элементов, перенумерованных числами 1, 2, 3, 4?

**3.5.** а) Сколько слов, каждое из которых состоит из восьми различных букв, можно составить из букв слова «алгоритм»?

б) При игре в бридж между четырьмя игроками распреде­ляется колода карт в 52 листа по 13 карт каждому игроку. Сколько существует различных способов раздать карты?

**Задание 4. *Решить задачи:***

**4.1.** а) В лотерее «Спортлото» игрок должен зачерк­нуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько существует всех возможных вариантов выбора для игрока?

б) Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколько существует способов выделения одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

**4.2.** а) Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников вручается только одна книга)?

б) У Нины есть семь разных книг по математике, а у Славы - девять разных книг по философии. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом по пять книг?

**4.3.** а) Сколькими способами можно выбрать четыре монеты из четырех пятикопеечных монет и из четырех двухко­пеечных монет?

б) У одного человека имеется 7 книг, а у другого – 9. Сколь­кими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

**4.4.** а) В колоде десять карт, из которых три – тузы. Наудачу последовательно вынимаются, запоминаются и возвращаются в колоду четыре карты. После каждого возвращения карты колода перемешивается. Сколько возможно случаев, когда среди вынутых карт окажется хотя бы один туз?

б) Сколькими способами можно распределить поровну 12 различных учебников между четырьмя студентами?

**4.5.** а) Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

б) Лифт с семью пассажирами останавливается на 10 эта­жах. На каждом этаже может выйти определенное число пасса­жиров (от нуля до семи). Сколько может быть различных спо­собов освобождения лифта? (Способы различаются только чис­лом людей, вышедших на данном этаже).

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте правило суммы; правило произведения.
2. Дайте определение размещений без повторений?
3. Запишите чему равны n!, 1! и 0!.
4. Что называют перестановками без повторений?
5. Что называют сочетаниями без повторений?
6. Дайте определение размещений с повторениями?
7. Что называют перестановками с повторениями?
8. Что называют сочетаниями с повторениями?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1.*Даны m, n, r, k элементов (см. табл. 1). Вычислить: а)  и ; б)  и ; в) сравнить  и ;  и .***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***m*** | ***n*** | ***r*** | ***k*** |  | ***№*** | ***m*** | ***n*** | ***r*** | ***k*** |
|  | 3 | 5 | 3 | 7 |  |  | 8 | 14 | 14 | 15 |
|  | 2 | 5 | 5 | 6 |  |  | 4 | 12 | 4 | 13 |

**Задание 2. *Решить задачи:***

**2.1.** а) Игрок сначала бросает белую игральную кость, потом черную. Сколько может быть случаев, когда число очков, появившихся на белой кости, больше числа очков, появившихся на черной?

б) Электронные документы передаются по семи каналам связи из пункта А в пункт В. В пункте В документы редактируются и передаются обратно в пункт А. а) Сколькими способами можно передать документ из пункта А в пункт В и обратно? б) Сколькими способами можно передать документ из пункта А в пункт В и обратно, если документ не может вернуться в пункт А по тому же каналу, по которому был передан в пункт В?

**2.2.** а) Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет разного достоинства?

б) Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если: а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза; б) цифры могут повторятся; в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторятся)?

**2.3.** а) Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непо­средственно выполнять переводы с любого из пяти языков: рус­ского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

б) Сколькими способами можно разместить 4 документа на 25 местах?

**2.4.** а) Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

б) Имеется 10 электронных документов, три из которых нужно поместить в очередь на печать на лазерном принтере. Сколькими способами это можно сделать?

**2.5.** а) Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если исполь­зуются 24 буквы русского алфавита и 10 цифр (0, 1, ..., 9).

б) Имеется 10 символов, которые можно использовать для составления двухбуквенного кода электронного документа. Сколько кодов можно составить: а) если символы не повторяются; б) если повторяются?

**Задание 3. *Решить задачи:***

**3.1.** а) Сколько букв азбуки «Морзе» можно составить из пяти сигналов в каждой букве, если три сигнала – «тире», а два – «точка»?

б) Сколькими способами семь книг разных авто­ров можно расставить на полке в один ряд?

**3.2.** а) Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому пред­мету одинаковые?

б) Найдите число различных перестановок в слове «статисти­ка»; в слове «парабола».

**3.3.** а) При бросании монеты будем считать успехом выпадение герба и неудачей выпадение цифры. Сколько различных ис­пытаний могло привести к 52 успехам при 100 подбрасываниях монеты? (Испытанием считается серия опытов из 100 бросаний; два испытания считаются различными, если не совпадают резуль­таты хотя бы двух бросаний).

б) Сколько различных перестановок образуется из слов «абракадабра», «зебра»?

**3.4.** а) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

б) Сколько пар можно составить из элементов, перенумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**3.5.** а) Сколькими способами при бросании 12 игральных ко­стей каждое из значений 2, 3, 4, 5, 6 выпадает дважды?

б) Сколькими способами можно расположить в ряд две зеленые и четыре красные лампочки?

**Задание 4. *Решить задачи:***

**4.1.** а) В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми от­крыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

б) Сколько можно построить различных прямоугольных па­раллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

**4.2.** а) В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников и 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?

б) В кондитерской имеется пять разных сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из четы­рех пирожных?

**4.3.** а) Из полного набора шахмат вынули 4 фигуры или пешки. Во скольких случаях среди них окажется; а) два коня, б) не ме­нее двух коней?

б) Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву?

**4.4.** а) Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

б) Для выигрыша в игральном автомате должны выпасть подряд четыре различные цифры. Сколько вариантов выигрышей при таких условиях возможно?

**4.5.** а) В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяют­ся два ученика. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

б) Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

**Практическое занятие 4.**

**Тема**: **Применение формул комбинаторики к вычислению вероятностей**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1*.** На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найдите вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

*Решение*:

Общее число возможных комбинаций для контрольного вскрытия равно числу сочетаний из 10 по 5, т.е. . Число исходов, благоприятствующих данному событию, будет равно числу таких комбинаций, в которых две цифры будут 2 и 5, а остальные будут составлять сочетания, число которых равно . Тогда искомая вероятность найдется по формуле:

.

***Задача 2*.** Группа туристов из пятнадцати юношей и пяти девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что из двадцати че­ловек выбирают 4 человека. Так как выбор осуществляется по жребию, то все исходы испытания равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число исходов испытания , так как вы­борка состоит из четырех элементов и порядок их расположения в выборке не учитывается. Пусть событие А состоит в том, что в составе выбранных окажутся два юноши и две девушки. Двух юношей из 15 можно выбрать  способами и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать способами. По правилу произведения событию А благоприятствует  исходов испытания. Искомая вероятность вычисляется по формуле  и равна .

***Задача 3.*** Из 20 акционерных обществ (АО) четыре являются банкротами. Приобрели по одной акции шести АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций две окажутся акциями банкротов.

*Решение*:

Общее число комбинаций выбора АО равно числу сочетаний из 20 по 6, т.е. . Число благоприятствующих исходов определяется как произведение , где  - число комбинаций выбора АО-банкротов из четырех,  - число комбинаций АО не являющихся банкротами. Поэтому искомая вероятность запишется в виде .

***Задача 4.*** На книжной полке произвольно расставлены 4 книги по теории вероятностей и 3 книги по теории множеств. Какова вероятность того, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что 7 книг ставятся на полку. Так как они ставятся на полку произвольно, то все исходы испытания равновероятны, кроме того, они несовместны. Семь книг на полке могут быть упорядочены 7! способами. Сле­довательно, число всех исходов испытания n = 7!. Событию А, состоящему в том, что книги по одному и тому же предмету ока­жутся рядом, благоприятствует m = 2 ⋅ 4! ⋅ 3! исходов испыта­ния. Действительно, комплект книг по теории вероятностей может быть упорядочен 4! способами, и после каждого такого расположения книги по теории множеств могут быть упорядочены 3! способами. Кроме того, сами комплекты книг могут быть упорядочены двумя способами. Таким образом, вероятность события А равна .

***Задача 5.*** В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что среди наугад вынутых 5 шаров 3 будут черными.

*Решение*:

Выбрать 5 шаров из 20 можно  различными способами (все выборки - неупорядоченные подмножества, состоящие из 5 элементов), т.е. . Определим число случаев благоприятствующих событию В - «Среди 5 вынутых шаров 3 будут черными». Число способов выбрать 3 черных шара из 8, находящихся в урне, равно . Каждому такому выбору соответствует  способов выбора двух белых шаров из 12 белых в урне. Следовательно, по правилу умножения, имеем: . Тогда вероятность .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1.*Решить задачу:***

1. В лифт 9-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них независимо от других может выйти на любом этаже (начиная со второго). Какова вероятность того, что все вышли: а) на разных этажах; б) на одном этаже; в) на 5 этаже.
2. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, Г, И, JI, М, О, Р, Т получится слово «алгоритм»?
3. Из колоды карт (36 штук) вытаскивают наудачу 5 карт. Какова вероятность того, что будут вытащены 2 туза и 3 шестерки?
4. Семь человек рассаживают наудачу на скамейке. Какова вероятность того, что два определенных человека будут сидеть рядом?
5. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди 3-х наугад выбранных вопросов студент знает: а) все вопросы; б) два вопроса.

**Задание 2.*Решить задачу:***

1. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит группа студентов, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.
2. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу вы­бранных билетов два окажутся на места первого ряда?
3. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подго­товил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает два?
4. Из букв слова «событие», составленного с помощью раз­резной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова ве­роятность получить при этом слово «быт»?
5. Во время спортивной игры по команде ведущего «стано­вись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики А и В окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

**Задание 3.*Решить задачу:***

1. В одном ящике имеется 12 однотипных деталей, из ко­торых 4 нестандартные, в другом 15 деталей и 3 из них нестандарт­ные. Из каждого ящика наудачу извлекается по 2 детали. Най­дите вероятность того, что из первого ящика извлекли 2 нестандарт­ные, а из второго ящика – 2 стандартные детали.
2. Из полного набора костей домино наудачу отобрали 4 кости, после чего кости возвратили э игру. Затем наудачу снова отобрали 4 кости. Какова вероятность того, что среди отобранных первый раз костей было 3 «дубля», а среди отобранных второй раз – только 2?
3. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6. Найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.
4. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что один из них оформлен правильно?
5. В барабане револьвера 7 гнезд, из них в 5 заложены патроны. Барабан приводится во вращение, потом нажимается спусковой курок. Какова вероятность того, что повторив такой опыт 2 раза подряд: а) оба раза не выстрелит; б) оба раза выстрелит?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1.*Решить задачу:***

1. На 5 карточках разрезной азбуки изображены буквы Е, Е, Л, П, П. Ребенок случайным образом выкладывает их в ряд. Какова вероятность того, что у него получится слово «пепел»?
2. Какова вероятность того, что при случайном расположе­нии в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, А, А, Н, Н, С, получится слово «ананас»?
3. Какова вероятность того, что наудачу выбранное дву­значное число не содержит ни одной двойки?
4. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизиро­ванной игре. В отряде 5 следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в раз­ведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если вклю­чение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?
5. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 вклю­чительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна де­сяти?

**Задание 2.*Решить задачу:***

1. В коробке находятся 4 красных и 6 зеленых карандашей. Из нее случайно выпали 3 карандаша. Какова вероятность того, что два из них окажутся красными?
2. Билет в партер стоит 50 руб., на бельэтаж – 40 руб. и на ярус – 30 руб. Найдите вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят вместе не дороже 80 руб.
3. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживают­ся 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных уче­ника окажутся рядом.
4. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются 3 открытки. Какова вероятность того, что все ото­бранные открытии будут разные?
5. Группа, состоящая из пяти юношей и семи девушек, рас­пределяет по жребию 4 билета в театр. Какова вероятность того, что в числе получивших билеты окажется больше девушек, чем юношей?

**Задание 3.*Решить задачу:***

1. Из урны, содержащей 9 белых, 9 черных, 9 синих и 9.красных шаров, наудачу извлекаются 3 шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся белые или черные шары?
2. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?
3. Из колоды карт 36 штук, наугад вынимают 2 карты. Найти вероятность, что среди них окажется хотя бы одна «дама»?
4. Вероятность правильного оформления накладной при передаче продукции равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех накладных только две оформлены правильно.
5. Для проведения соревнования 10 команд, среди которых 3 лидера, путем жеребьевки распределяются на 2 группы по 5 команд в каждой. Какова вероятность того, что 2 лидера попадут в одну группу, 1 лидер – в другую?

**Практическое занятие 5.**

**Тема**: **Применение основных теорем теории вероятностей**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Вероятность суммы двух несовместных событий определяется аксиомой А3:

, .

**Теорема 1**. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Можно получить формулу вероятности суммы трех и большего числа совместных событий. Для трех событий она имеет вид:



.

**Условной вероятностью** события *В* при условии, что произошло событие *А*, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события *А*, причем , обозначается символом . Таким образом, по определению:

|  |  |
| --- | --- |
| , . |  |

Условная вероятность события *А* при условии *В*, т.е. :

|  |  |
| --- | --- |
| , . |  |

Из определения условной вероятности следует, что

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

т.е. **вероятность произведения** двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

В случае *n* событий.

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Для трех событий А1, А2, А3 получаем:

  
.

Событие *А* называется **независимым**от события *В*,если выполняется равенство

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

т.е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Указания*.** В случае, когда требуется найти вероятность суммы или произведения событий, то анализ и решение задач, можно осуществлять по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит рассматриваемое в задаче испытание.
2. Обозначьте буквами события, рассматриваемые в условии задачи.
3. С помощью введенных обозначений выразите событие, вероят­ность наступления которого необходимо найти.
4. Если требуется найти вероятность суммы событий, выясните, совместны или несовместны рассматриваемые события. Если же требуется найти вероятность произведения событий, выясните, зависимы или независимы рассматриваемые события.
5. Выберите соответствующую условию задачи формулу и вы­полните необходимые вычисления.

***Задача 1*.** На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. В темноте срывают одну астру. Какова вероятность сорвать окрашенную астру?

*Решение*:

Событие А состоит в том, что сорвали синюю или красную астру. Вероятность сорвать синюю астру , а вероятность сорвать красную астру . Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т.е. .

***Задача 2*.** В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый; черный; синий; красный; белый или черный; синий или красный; белый, черный или синий.

*Решение*:

Имеем n=10+15+20+25=70, Вероятность вынуть белый шар составляет ; черный - ; синий - ; красный - . Применив теорему сложения вероятностей, получим

,

,

.

***Задача 3*.** В двух коробках лежат карандаши одинаковой величины и формы, но разного цвета. В первой коробке 4 красных, и 6 черных, а во второй 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимается наугад по одному карандашу. Какова вероят­ность того, что оба карандаша окажутся красными?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что из каждой коробки вынимается по одному карандашу. Пусть событие А означает, что вынутый карандаш из первой коробки оказался красным, событие В – что вынутый карандаш из второй коробки тоже красный. Тогда событие АВ означает, что оба вынутые карандаша оказались красными. Поскольку события А и В независимы, то *р(АВ)=р(А) р(В)*. Вероятности событий А и В равны соответственно *р(А)=0,4, р(В)=0,3*. Следовательно, вероятность того, что оба карандаша оказались красными, равна *р(АВ)=0,4⋅ 0,3=0,12*.

***Задача 4*.** В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

*Решение*:

В данном случае речь идет о совмещении событий А и В, где событие А – появление белого шара из первого ящика, событие В – появление белого шара из второго ящика. При этом А и В независимые события. Имеем , . Применив формулу умножения вероятностей находим .



***Задача 5*.** Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9.

а) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы?

б) Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

*Решение*:

а) Пусть событие А - первое изделие стандартное и В - второе изделие стандартное. События независимые. Используем формулу умножения вероятностей , т.е. .

б) Событие, состоящее в том, что только первое изделие стандартное можно рассматривать как произведение двух событий , т.е. появилось первое событие и не появилось второе, а событие, состоящее в том, что только второе изделие стандартное - . Эти события несовместимые, поэтому



Учитывая, что , получим

.

***Задача 6*.** Стрелок ведет огонь по цели, движущейся на него. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,4 и увеличивается на 0,1 при каждом последующем выстреле. Какова вероятность получить два попадания при трех независи­мых выстрелах?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что производятся три выстрела по цели. Пусть события *А1, А2, А3* означают попадания соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Тогда , ,  будут означать соответствующие промахи. Используя эти события, выразим событие, означающее два попадания при трех выстрелах: . События , ,  несовместны, а события *А1, А2, А3,*, , независи­мы. Отсюда следует, что



Но *р(А1)=0,4, р(А2)=0,5, р(А3)=0,6.* Следовательно *р()=0,6, р()=0,5, р()=0,4.* Значит, искомая вероятность равна *0,38.*

***Задача 7*.** Вероятность поражения цели одной ракетой равна 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы одна из ракет поразит цель, если они выпущены независимо друг от друга?

*Решение* 1*.*

Испытание состоит в том, что две ракеты выпущены по цели. Пусть событие А означает, что первая ракета поразила цель, а событие В – что вторая ракета поразила цель. Тогда событие А + В означает, что хотя бы одна ракета поразила цель. События А и В совместны. Поэтому *.*

Кроме того, из условия задачи следует, что события А и В независимы. Значит, *.*

*Решение* 2.

Пусть событие С состоит в том, что хотя бы одна ракета поразила цель. Тогда противоположное ему событие состоит в том, что обе ракеты прошли мимо цели. Значит, , где А означает промах первой ракеты, а В – промах второй. Но , так как события А и В независимы. Вычисляем  и . Следовательно, .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу*:**

1. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?
2. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них три книги по теории вероятностей, три – по математическому анализу и четыре – по линейной алгебре. Случайным образом достают одну книгу. Какова вероятность того, что возьмут книгу по теории вероятностей или по линейной алгебре?
3. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель: а) только одного из орудий; б) хотя бы одного.
4. В порт приходят корабли только из трех пунктов отправления. Вероятность появления корабля из первого пункта равна 0,2, из второго пункта – 0,6. найти вероятность прибытия корабля из третьего пункта.
5. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – волейболом и баскетболом, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

**Задание 2. *Решить задачу*:**

1. Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по ал­гебре равна 0,8, а по геометрии – 0,6. Какова вероятность пра­вильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?
2. Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероят­ность того, что при трех независимых измерениях все ошибки будут положительными?
3. Ученик отвечает на 5 вопросов словами «да» и «нет». Ка­кова вероятность того, что ответы на все вопросы оказались пра­вильными, если он отвечал наудачу?
4. Пусть  и . Совместны ли события А и В?
5. В студенческой группе 0,9 всего состава группы успешно сдали экзамен, причем 0,4 всех студентов получили отметку «отлично». Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент получил отметку «хоро­шо» или «удовлетворительно»?

**Задание 3. *Решить задачу*:**

1. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность по­падания в цель первого стрелка 0,9, вто­рого – 0,75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?
2. В студенческой группе 0,9 всего состава группы успешно сдали экзамен, причем 0,4 всех студентов получили отметку «отлично». Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент получил отметку «хоро­шо» или «удовлетворительно»?
3. Пусть события А и В независимы. Докажите, что следующие пары событий тоже независимы: а) А и ; б) и В; в)  и .
4. В урне 9 белых и 1 черный шар. Вынули сразу три шара. Какова вероятность того, что все шары белые?
5. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
2. Чему равна вероятность суммы n-го числа несовместных событий?
3. Сформулируйте теорему вероятности суммы двух совместных событий.
4. Чему равна вероятность суммы n-го числа совместных событий?
5. Чему равна вероятность суммы двух противоположных событий? Запишите формулу.
6. Какие события называются независимыми?
7. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
8. Что называют условной вероятностью события?
9. Что называют безусловной вероятностью события?
10. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу*:**

1. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее наудачу вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что они оба будут разных цветов?
2. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?
3. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в институт, зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?
4. Вероятность того, что початки кукурузы имеют 12 рядов, равна 0,49, 14 рядов – 0,37 и 16–18 рядов – 0,14. Какова ве­роятность того, что наудачу выбранный початок будет иметь 12 или 14 рядов?
5. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем 5книг стоят по 4 руб. каждая, 3 книги – по 2 руб. и 2 книги – по 1 руб. Найти вероятность того, что взятая наудачу книга стоит не дороже двух рублей.

**Задание 2. *Решить задачу*:**

1. Производятся 4 независимых выстрела. Вероятность пора­жения цели стрелком при каждом из выстрелов равна р. Какова вероятность того, что первые два выстрела будут попаданиями, а последующие два – промахами?
2. Из двух полных наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся слонами?
3. Пусть , , . Найдите *р(А+В)*.
4. Выполненная контрольная работа состоит из задачи и при­мера. Вероятность того, что в наудачу выбранной работе правиль­но решена задача, равна 0,8, а того, что получен хотя бы один правильный ответ, – 0,9. Найдите вероятность того, что правильно решен пример.
5. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экза­мен – 0,85 и третий – 0,8. Какова вероят­ность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов?

**Задание 3. *Решить задачу*:**

1. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение часа равна 0,9,а второго – 0,95. Какова вероятность того, что в течение часа произойдет на­рушение в работе только одного станка, если станки работают независимо друг от друга?
2. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад извлекается одна карта. Событие А означает, что извлеченная карта является ту­зом, событие В – что вынута карта трефовой масти. Найди­те вероятности *р(А), р(В), р(АВ)*. Независимы ли события А и В? Решите эту же задачу при условии, что в колоду добавлена карта «джокер», не имеющая масти и не являющаяся тузом.
3. В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором ящике 2 белых, 6 красных, 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров нет синих?
4. Производят три выстрела по одной мишени. Вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.
5. Три орудия стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель каждого равна 0,7. Найти вероятность попадания в цель: а) только одного из орудий; б) хотя бы одного.

**Практическое занятие 6.**

**Тема:Формула полной вероятности. Формула байеса**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Формула полной вероятности***

**Теорема 1.** Пусть события  образуют полную группу. Тогда для любого события *А* имеет место формула **полной вероятности** или *средней вероятности*.

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

***Формула Байеса***

**Теорема 2** Пусть события  образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события *H*k при условии, что событие *А* произошло, задается формулой:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

где  – формула полной вероятности. Формула (3.12) называется **формулой Байеса**.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Указания*.** При вычислении вероятности рассматриваемого события по формуле полной вероятности необходимо:

1. Уяснить последовательность испытаний, рассматриваемых в задаче.
2. Обозначить событие, вероятность наступления которого надо найти какой-нибудь буквой, например А.
3. Составить множество попарно несовместных гипотез Н1, Н2, ..., Нn. Проверить, что объединение гипотез совпадает с про­странством элементарных событий проводимого испытания.
4. Вычислить вероятности каждой из гипотез и условные вероятности наступления события А при условии, что произошли событие Нi (*i* = 1, 2, ..., n) (если они не даны в условии задачи).
5. По формуле (16) вычислить вероятность события А. Если из условия задачи известно, что событие А уже произошло, то по формуле Байеса необходимо вычислить вероятности гипотез при условии, что событие А произошло.

***Задача 1*.** В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

*Решение*:

Пусть событие А – появление белого шара при первом вынимании, а событие В – появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей для случая зависимых событий имеем . Но вероятность появления первого белого шара равна , а вероятность появления второго белого шара в предложении, что первый белый шар уже вынут равна . Следовательно, .

***Задача 2*.** В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

*Решение*:

Пусть А – событие, состоящее в том, что в первом выбранном поселке находится пункт проката, а В – событие, состоящее в том, что во втором выбранном поселке находится пункт проката.

Вероятность события А: .

Рассмотрим событие В при условии, что событие А произошло. Найдем условную вероятность .

Искомая вероятность найдется как вероятность произведения двух событий .

***Задача 3.***  Ученик 2 раза извлекает по одному билету из 34, предлагаемых на экзамене. Какова вероятность того, что уче­ник сдаст экзамен, если он подготовил только 30 билетов и пер­вый раз вынул неудачный билет?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что два раза науда­чу извлекаются по одному билету, причем вынутый первый раз билет назад не возвращается.

Пусть событие А заключается в том, что первый раз вынут «неудачный» билет, а событие В – в том, что второй раз вынут «удачный» билет. Требуется вычислить вероятность события АВ, состоящего в том, что первый раз был вынут «неудачный» билет, а второй раз – «удачный». События А и В зависимые, так как вынутый первый раз билет не возвращается в число всех билетов. Поэтому *.* Из условия задачи находим: . Если событие А произошло, то на столе экзаменатора осталось 33 билета, из которых 30 «удачных». Следовательно,

 и искомая вероятность .

***Задача 4*.** Имеются три партии радиоламп, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятности того, что радио­лампа проработает заданное время, равны соответственно для этих партий 0,7; 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа из ста данных проработает заданное время?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что наудачу извле­кается одна лампочка из *100* ламп. Событие *А*, вероятность кото­рого надо вычислить, состоит в том, что извлеченная лампа про­работает заданное время. Пусть гипотезы *Hl, H2, H3* означают соответственно, что наудачу выбранная радиолампа принадлежит первой, второй, третьей партии. По формуле (1) *р(Hl)=0,2, р(H2)=0,3* и *р(H3)=0,5.*

По условию задачи , , .

По формуле полной вероятности находим вероятность события *А*, которая равна



***Задача 5*.**  Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению?

*Решение*:

Событие В1 состоит в получении задачи по дифференциальному исчислению. Его вероятность равна р(В1)=0,4. Событие В2 состоит в получении задачи по интегральному исчислению. Его вероятность равна р(В2)=0,6. Если событие А означает, что задача решена, то, . Теперь по формуле полной вероятности имеем

*.*

***Задача 6*.** В условие предыдущего примера внесено из­менение: считается известным, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время. Какова вероятность того, что эта радиолампа принадлежит первой партии?

*Решение*:

Из условия задачи известно, что наудачу вы­бранная радиолампа проработала заданное время, т.е. событие А уже произошло. После получения этой дополнительной инфор­мации нам надо определить, как изменилась вероятность гипотез. Требуется вычислить вероятность гипотезы Н1 при условии, что событие А произошло. По формуле Байеса

,

т. е. вероятность того, что лампочка принадлежит первой партии, после опыта уменьшилась и стала равной 0,169.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1.*Решить задачу:***

1. В урне 2 белых и 7 черных шаров. Из нее последовательно вынимают два шара. Какова вероятность того, что 2-й шар окажется белым при условии, что 1-й шар был черным?
2. Ученик забыл последнюю цифру даты Куликовской бит­вы и поэтому называет ее наудачу. Определить вероятность того, что до правильного ответа ему придется отвечать не более трех раз.
3. Производится наудачу выбор флага из 4-х, имеющихся в наличии: красного, голубого, белого и трехцветного (красно-бело-голубого). Исследовать на независимость события: К – выбранный флаг имеет красный цвет, Г – выбранный флаг имеет голубой цвет, Б – имеет белый цвет.
4. В коробке имеются 2 красных, 3 синих и 2 зеленых каран­даша. Из нее наудачу без возвращения вынимают один за другим по одному карандашу. Найти вероятность того, что красный ка­рандаш появится раньше синего.
5. Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,8. Если стрелок попадает в цель при первом выстреле, то ему предостав­ляется право стрелять во вторую цель. Вероятность поражения обеих целей этим стрелком равна 0,6. Какова вероятность пораже­ния стрелком второй цели?

**Задание 2.*Решить задачу:***

1. Студент знает ответы на 15 экзаменационных билетов из 20. В каком случае он имеет большую вероятность сдать экзамен, если он идет отвечать первым или если – вторым?
2. Имеются 2 одинаковые урны, первая из которых содержит 2 черных и 3 белых шара, а вторая – 2 черных и 1 белый шар. Сначала наугад выбирается одна урна, а потом из нее извлекается наугад один шар. Какова вероятность того, что будет выбран бе­лый шар? Решите ту же задачу, исходя из условия, что обе урны содержат по два белых и два черных шара.
3. Из полного набора костей домино наудачу выбрана одна кость, которая в игру не возвращается. Какова вероятность того, что наудачу выбранную вторую кость можно приставить к первой?
4. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из I цеха и 60% - из II цеха. В I цехе производится 90% стандартных деталей, а во II – 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется стандартной.
5. Из 40 экзаменационных билетов студент выучил только 30. Каким выгоднее ему зайти на экзамен, первым или вторым?

**Задание 3.*Решить задачу:***

1. В сборочный цех завода поступает 40% деталей из I цеха и 60% - из II цеха. В I цехе производится 90% стандартных деталей, а во II – 95%. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком стандартная деталь окажется изготовленной во II цехе.
2. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, а во второй – 6 белых и 4 черных. Наудачу выби­рается урна и из нее наугад вынимается один шар. Выбранный шар оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар вынут из первой урны?
3. В одной студенческой группе обучаются 24 студента, во второй – 36 студентов и в третьей – 40 студентов. По матема­тическому анализу получили отличные отметки 6 студентов пер­вой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей груп­пы. Наугад выбранный студент оказался получившим по матема­тическому анализу отметку «отлично». Какова вероятность того, что он учится в первой группе?
4. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили ответы на все вопросы, 8 – на 25 вопросов, 5 – на 20 вопросов и двое – на 15. Вызван­ный наудачу студент ответил на поставленный ему вопрос. Найдите вероятность того, что этот студент: а) подготовил все вопросы; б) подготовил только половину вопросов.
5. В классе обучаются 20 девочек и 10 мальчиков. К уроку не выполнили домашнее задание 4 девочки и 3 мальчика. Наудачу вызванный ученик оказался неподготовленным к уроку. Какова вероятность того, что отвечать был вызван мальчик?

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение разбиения.
2. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
3. Что означает термин «априорные»?
4. Что означает термин «апостериорные»?
5. Сформулируйте теорему гипотез.
6. Запишите формулу Байеса. Что обозначают величины, входящие в формулу?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1.*Решить задачу:***

1. В коробке находятся 4 белых, 3 синих, 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-й шар будет белым, 2-й – синим, 3-й – черным?
2. В экзаменационные билеты включено по два теоретичес­ких вопроса и одной задаче. Всего составлено 28 билетов, содер­жащих разные вопросы и задачи. Студент подготовил только 50 теоретических вопросов и сможет решить задачи к 22 билетам. Какова вероятность того, что, вынув наудачу один билет, сту­дент ответит на все вопросы?
3. Буквы слова «задача», написаны на одинаковых карточках. Наудачу по одной последовательно извлекаются 4 карточки без возвращения их в игру. Какова вероятность того, что при этом получится слово «дача»?
4. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8. Если за­чет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен?
5. Студент держит экзамен, состоящий в установлении истин­ности или ложности пяти утверждений. Какова вероятность пра­вильного ответа на все вопросы, если студент: а) просто угадывает ответ; б) знает, что преподаватель всегда дает больше истинных утверждений, чем ложных; в) знает, что преподаватель никогда не дает подряд трех во­просов, требующих одинакового ответа; г) знает, что, кроме того, ответы на первый и последний во­просы противоположны; д) знает еще, что «ложно» – ответ на второй вопрос?

**Задание 2.*Решить задачу:***

1. Из группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, наугад выбирают двух человек. Какова вероятность того, что: а) оба выбранных окажутся юношами; б) оба окажутся юношами, если известно, что один из выбран­ных юноша; в) оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша, которому не более 18 лет; г) оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша 17 лет?
2. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наудачу выбирается урна и из нее наугад выни­мается один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?
3. Ученик пришел на экзамен, зная 25 билетов из 30. Передним был взят только один билет. Какова вероятность того, что ученик знает наудачу вытянутый билет?
4. На карточках написаны буквы, образующие слово «ком­бинаторика», но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется гласная буква?
5. Прибор содержит две микросхемы. Вероятность выхода из строя в течение 10 лет первой микросхемы равна 0,7, а второй – 0,1. Известно, что из строя вышла одна микросхема. Какова вероятность того, что вышла из строя первая микросхема?

**Задание 3.*Решить задачу:***

1. Известно, что 90% изделии, выпускаемых предприятием, отвечает стандарту. Упрощенная схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,96 и нестандартную с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие пройдет контроль; б) изделие, прошедшее контроль качества, отвечает стандарту.
2. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая коль­ца на колышек. Для пяти из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, для трех других – 0,5 и для остальных – 0,3. Кольцо, брошенное одним из юношей, попало на колышек. Какова вероятность того, что это кольцо было брошено юношей из первой группы?
3. Преподаватель экзаменует незнакомую ему группу по экзаменационным билетам, содержащим по три вопроса. Он знает, что в предыдущую сессию в этой группе было 27 успевающих сту­дентов, из них шесть отличников, и трое неуспевающих студен­тов, и считает, что отличники ответят на все три вопроса с ве­роятностью 80%, остальные успевающие студенты – с вероят­ностью 60% и неуспевающие – с вероятностью 20%. Вызванный студент ответил на все три вопроса билета. Какова вероятность того, что он: а) отличник; б) успевающий студент; в) неуспеваю­щий студент?
4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 7 белых и 3 черных и в третьей – только черные. Наудачу выбирается урна и из нее наугад выни­мается один шар. Выбранный наудачу шар оказался черным. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?
5. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских шуб. Для анализа качества отобрали три шубы случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных шуб окажутся: а) только женские шубы; б) только мужские или только женские шубы.

**Практическое занятие 7.**

**Тема**: ***Практическое применение формул Бернулли и предельных теорем в схеме Бернулли***

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Теорема 1.** Если производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *А* равна *р*, а вероятность его непоявления равна , то вероятность того, что событие *А* произойдет *m* раз определяется формулой Бернулли

|  |  |
| --- | --- |
| , . |  |

Можно заметить, что вероятности ,  являются коэффициентами при  в разложении  по формуле бинома Ньютона:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Поэтому совокупность вероятностей  называют **биномиальным законом распределения** вероятностей, а функцию  - **производящей функцией** для последовательности независимых опытов.

Если в каждом из независимых испытаний вероятности наступления события *А* разные, то вероятность того, что событие *А* наступит *m* раз в *n* опытах, равна коэффициенту при *m*-й степени многочлена , где  - производящая функция.

**Теорема Пуассона**

**Теорема 2.** Если число испытаний неограничено увеличивается (*п*→∞) и вероятность *р* наступления события *А* в каждом испытании неограничено уменьшается (*р*→0), но так, что их произведение *пр* является постоянной величиной (*пр=а=* const), то вероятность удовлетворяет предельному равенству:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Приближенная **формула Пуассона**:

|  |  |
| --- | --- |
| , , . |  |

**Теорема 3 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**. Если вероятность *р* наступления события *А* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность может быть вычислена по приближенной формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| , где . |  |

Равенство тем точнее, чем больше *n*.

Выражение 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

называется **функцией Гуасса.**

**Теорема 4. (Интегральная теорема Муавра-Лапласа)**. Если вероятность *р* наступления события *А* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность  может быть найдена по приближенной формуле:

|  |  |
| --- | --- |
| , где , . | (7) |

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Указание 1*.** Для того чтобы проверить удовлетво­ряет ли рассматриваемый эксперимент схеме Бернулли, необходимо проверить, что:

1. проводимые испытания независимы,
2. каждое испытание имеет два исхода,
3. вероятность появления события в каждом испытании по­стоянна и равна р.

После этого необходимо ввести соответствующее обозначение со­бытия, вероятность наступления которого надо вычислить, и вы­брать нужную формулу.

***Указание 2*.** При выборе формулы можно руководствовать­ся следующим:

1. Если число независимых испытаний n мало, то для вычис­ления вероятности появления события m раз пользуются форму­лой Бернулли  , где m= 0, 1, 2, …, n. В этом случае не возникает вычислительных трудностей для подсчета *Рn*(*m*).

2. Если число независимых испытаний n мало и требуется найти вероятность появления события от m1 до m2 раз, то для вычисления применяют формулу .

3. Если число независимых испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании отлична от 0 и 1, то для вычисления  применяют формулу Лапласа , где  и .

4. Если число независимых испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала, то для вычисления  применяют формулу Пуассона  причем .

5. Если число независимых испытаний *n* достаточно велико, то для вычисления вероятности появления события от *m*1 до *m*2 раз:

а) при малом числе слагаемых в сумме и вероятности появления события в каждом испытании, отличной от 0 и 1, можно применить формулу:

;

б) при малом числе слагаемых в сумме  и малой вероятности появления события в каждом испытании можно применить формулу:

, где .

в) при достаточно большом числе слагаемых применяется ин­тегральная теорема Лапласа .

***Задача 1*.** В результате обследования были выделены семьи имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: а) одного мальчика; б) двух мальчиков.

*Решение*:

Вероятность появления мальчика или девочки равна . Вероятность появления мальчика в семье, имеющей четырех детей, находится по формуле Бернулли:

*.*

Вероятность появления в семье двух мальчиков равна

*.*

***Задача 2*.** Вероятность выигрыша по одному билету лотереи «Русское лото» равна 0,2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?

*Решение*:

Эксперимент состоит в том, что последователь­но проверяются 6 билетов, т.е. проводится 6 повторных незави­симых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: билет выигрышный, билет невыигрышный. Вероятность выигрыша в каждом испытании постоянна. Следовательно,- схема Бернулли выполняется. Пусть событие (m = 2) состоит в том, что 2 билета оказались выигрышными. Тогда по формуле Бернулли:

.

***Задача 3*.** Прибор состоит из шести элементов, включен­ных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время t равна 0,6. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время t прибор будет работать безотказно?

*Решение*:

Эксперимент заключается в проведении шести повторных независимых испытаний с двумя исходами каждый. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна q = 0,4. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие (m≥1) означает, что хотя бы один элемент прибора исправен. Тогда по формуле (19) вероятность наступления рассматриваемого события равна .

***Задача 4*.** Используя условия предыдущего примера, най­дите число элементов, которые необходимо включить в прибор, чтобы с вероятностью не менее 0,9 прибор работал безотказно.

*Решение*:

Так как в задаче требуется, чтобы выполнялось условие Рm(m≥1)≥0,9, то имеем . Отсюда . Прологарифмируем это неравенство, тогда . Так как , то .

Значит, в приборе должно быть не менее трех элементов для того, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он работал безотказно.

***Задача 5*.** Найдите вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти неза­висимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

*Решение*:

Эксперимент заключается в проведении пяти повторных испытаний, независимых, с двумя исходами в каждом (разговор состоялся, разговор не состоялся). Вероятность того, что, разговор состоится, в каждом испытании постоянна. Следо­вательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие (2≤m≤4) означает, что состоялось от двух до четырех разговоров. Тогда по формуле (20) имеем:



***Задача 6*.** Магазин получил 50 деталей. Вероятность на­личия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

*Решение*:

Проводится 50 повторных независимых испы­таний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления нестандартной детали в каждом испытании постоянна. Значит, схема Бернулли выполняется. По формуле (21) имеем:





Так как число деталей может быть только целым, то наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии равно 2.

***Задача 7*.** Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий 530 будут первого сорта.

*Решение*:

Эксперимент заключается в проведении 600 по­вторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Ве­роятность появления изделия первого сорта в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли применима.

По условию задачи n = 600, m = 530, *р* = 0,9. Так как n достаточно велико, а *р* и *1–р* не малы, то для вычисления ве­роятности того, что событие А (взятая деталь оказалась первого сорта) появилось 530 раз, можно использовать формулу (22). При этом вычисления осуществляются в следующем порядке:

1) Вначале вычислим .

2) Затем находим.

3. В силу четности функции  имеем .

4. По таблице значений находим .

5. Следовательно, .

***Задача 8*.** С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути; равна 0,0005. Найдите вероятность того, что в магазин прибудут 3 испорченных изделия.

*Решение*:

Испытания, рассматриваемые в задаче, удов­летворяют схеме Бернулли. По условию задачи n=4000, m=3, *р*=0,0005. Так как n достаточно велико, а *р*=0,0005 сравни­тельно мало, то для вычисления  можно воспользоваться теоремой Пуассона. Сначала вычислим: . Тогда по формуле (26) .

***Задача 9*.** В условиях примера 1 найдите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 530 до 532 изделий (включительно) будут первого сорта.

*Решение*:

По условию задачи n=600, m1=530, m2=532, *р*=0,9. Так как для вычисления можно использовать формулу Лапласа, а число слагаемых в сумме равно трем,

то для вычисления можно использовать формулу (27).



1) Вначале вычислим: 

2) Затем находим: , где *i=1, 2, 3*,

при m1=530 х1=(530 – 540) ⋅ 0,136 = –1,36,

при m2=531 х2=(531 – 540) ⋅ 0,136 = –1,22,

при m3=532 х3=(532 – 540) ⋅ 0,136 = –1,09.

3) В силу четности функции имеем:

, , .

Ф (xt) - ф (1,36), Ф (\*,) = ф (1,22), Ф (х8) = ф (1,09).

4) По таблице значений находим:

, , .

5) Следовательно,

.

***Задача 10*.** В условиях примера 1 найдите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 520 до 535 изделий (включительно) будут изделиями первого сорта.

*Решение*:

По условию задачи n=600, m1=520, m2=535, *р*=0,9. Так как число независимых испытаний достаточно велико и число слагаемых в сумме  равно шестнадцати, то для вычисления можно использовать интегральную теорему Лапласа. По формуле (25):



где , .

1) Вначале вычислим:

, .

2) По таблице значений функции Лапласа, учитывая ее не­четность, находим: и :

,

.

3) Следовательно,

.

***Задача 11*.** Используя условия примера 2, найдите ве­роятность того, что в магазин прибудет от 3 до 5 испорченных из­делий.

*Решение*:

По условию задачи n=4000, m1=3, m2=5, *р*=0,0005 и . Так как для вычисления можно использовать формулу Пуассона, а число слагаемых в сумме  равно трем, то для вычисления  можно использовать формулу (28)

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу:***

1. Производится три независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны *р*=0,9. Какова вероятность: а) промаха; б) одного попадания; в) двух попаданий; г) трех попаданий?
2. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне не перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров два окажутся белыми?
3. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет: а) 4 раза; б) ни разу; в) хотя бы один раз.
4. Для данного участника игры вероятность набросить коль­цо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать не­зависимыми?
5. Что вероятнее выиграть у равносильного противника-шахматиста: две партии из четырех или три из шести? Ничья во внимание не принимается.

**Задание 2. *Решить задачу:***

1. В семье трое детей. Какова вероятность того, что: а) все они мальчики; б) один мальчик и две девочки. Считать вероятность рождения девочки 0,49, а мальчика – 0,51.
2. Вероятность того, что стрелок попадает в цель при од­ном выстреле, равна 0,7. Производится 5 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что в мишени окажется хотя бы одна пробоина?
3. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка радиоламп. Сколько ламп надо взять, чтобы с вероятностью не менее 0,9 была извле­чена хотя бы одна нестандартная лампа?
4. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Найдите вероятность того, что из десяти посаженных кустов помидоров приживется не ме­нее девяти.
5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,85. Стрелок сделал 25 независимых выстрелов. Найдите наивероятнейшее число попаданий.

**Задание 3. *Решить задачу:***

1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.
2. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.
3. Найдите вероятность того, что при десяти независимых испытаниях событие А произойдет 4 раза, если вероятность его появления при каждом испытании равна . Вычисление выполните, используя теорему Бернулли и локальную теорему Лапласа. Найдите относительную ошибку полученного результата. Объяс­ните, почему эта ошибка велика.
4. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Что вероятнее: отказ четырех приборов при испытании 20 или отказ шести приборов при испытании 30, если приборы испытываются независимо друг от друга?
5. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии превысит суточную норму, равна 0,2. Какова вероятность того, что за 25 рабочих дней будет зафиксирован перерасход электроэнергии: а) в течение пяти дней, б) от пяти до семи дней включительно?

**Задание 4. *Решить задачу:***

1. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях игральной кости пятерка выпадет от 10 до 20 раз включительно?
2. Завод по производству вина оправил на базу 1500 бутылок вина. Вероятность того, что в пути бутылка может разбиться, равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет разбито не более 4-х бутылок (событие А).
3. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,005. Найдите вероятность того, что из 600 проверяемых изделий не выдержат испытания более двух изделий.
4. Из полного набора костей домино наудачу 75 раз извле­кают по одной кости, причем после каждого извлечения кость возвращается в игру. Какова вероятность того, что при этом «дубль» появится 25 раз?
5. Вероятность брака при изготовлении некоторого изделия равна 0,02. Найти вероятность того, что среди 200 произведенных изделий не более одного бракованного.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Запишите формулу Бернулли.
2. Запишите формулу производящей функции.
3. Сформулируйте теорему Пуассона.
4. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа. Запишите формулу и поясните, что означают величины входящие в формулу.
5. Запишите функцию Гаусса.
6. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа. Запишите формулу и поясните, что означают величины входящие в формулу.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу:***

1. Решить предыдущую задачу в случае, если вероятности попадания в цель при разных выстрелах различны: , , .
2. Вероятность появления события А равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие А появится не более трех раз?
3. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?
4. Вероятность отказа каждого прибора при испытании рав­на 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если при­боры испытываются независимо друг от друга?
5. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерас­хода электроэнергии не будет?

**Задание 2. *Решить задачу:***

1. В двух карманах лежит по коробку спичек (по 10 спичек в коробке). При каждом закуривании, карман выбирается наудачу. При очередном закуривании, коробок оказался пустым. Найти вероятность того, что во втором коробке 6 спичек.
2. Вероятность появления события А хотя бы один раз при пяти независимых испытаниях равна 0,99757. Какова постоянная вероятность появления этого события при одном испытании?
3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле рав­на 0,2. Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,99 в мишени была хотя бы одна пробоина?
4. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каж­дый вопрос приведено 5 ответов, один из которых правильный. Ка­кова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан: а) на 3 вопроса, б) не менее чем на 3 вопроса?
5. Известно, что вероятность прорастания семян данной пар­тии пшеницы 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

**Задание 3. *Решить задачу:***

1. Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 100 раз событие А – появление герба – не наступит ровно 60 раз.
2. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ровно три изделия; б) более трех изделий.
3. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях играль­ной кости шестерка выпадет 10 раз?
4. Проверкой установлено, что цех в среднем выпускает 96% продукции высшего сорта. На базе приемщик проверяет 200 изделий этого цеха. Если среди них окажется более 10 изделий не высшего сорта, то вся партия изделий бракуется, т.е. возвращается в цех. Какова вероятность того, что партия будет принята?
5. Найти такое число m, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что среди 800 новорожденных более m девочек. Считать, что вероятность рождения девочки равна 0,485.

**Задание 4. *Решить задачу:***

1. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероят­ность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,1. Най­дите вероятность того, что среди них окажется от 100 до 120 де­талей с личным клеймом.
2. Вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,02. Какова вероятность того, что из 100 билетов выигрыш выпадет: а) на два билета, б) хотя бы на один билет, в) на два или три би­лета?
3. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Проверяется книга, содержащая 800 стра­ниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажется: а) 5 страниц, б) от трех до пяти страниц.
4. На лекции по теории вероятностей присутствует 84 студента. Какова вероятность того, что среди них есть 2 студента, у которых сегодня день рождения?
5. Произведено 400 независимых испытаний. Какова должна быть вероятность появления события А в каждом испытании (ве­роятность появления события А в каждом испытании одна и та же), чтобы наиболее вероятное число появления события А при этом равнялось 150?

**Практическое занятие 8.**

**Тема*:* Распределение вероятностей дискретных случайных величин**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Под **случайной величиной**понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий (S - σ-алгебра событий пространства Ω), в частности, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений, называется **законом распределения случайной величины**(или распределением).

Для дискретной случайной величины *X*закон распределения может быть задан в виде **таблицы распределения**:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x*1 | *x*2 | … | *x*n | … |
| *P* | *p*1 | *p*2 | … | *p*n | … |

где первая строкасодержит все возможные значения (обычно в порядке возрастания**)** случайной величины,а вторая - их вероятности. Такую таблицу называют **рядом распределения**.

Ломаную, соединяющую последовательно точки (*x*1, *p*1), (*x*2, *р*2), … называют**многоугольником (**или *полигоном***) распределения** (см. рис. 5.1).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

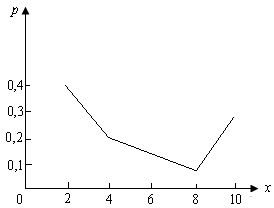
***Задача 1*.** Даны вероятности значений случайной величины Х: значение 10 имеет вероятность 0,3; значение 2 - вероятность 0,4; значение 8 – вероятность 0,1; значение 4 – вероятность 0,2. Построить ряд распределения случайной величины Х.

*Решение*:

Расположив значения случайной величины в возрастающем порядке, получим ряд распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 2 | 4 | 8 | 10 |
| *pi* | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 0,3 |

Возьмем на плоскости *Охр* точки (2; 0,4), (4; 0,2), (8; 0,1) и (10; 0,3). Соединив последовательно точки прямолинейными отрезками, получим так называемый многоугольник (или полигон) распределения случайной величины Х.



***Задача 2*.** Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,8, а вероятность того, что второй – 0,6. Случайная величина Х – число покупок, сделанных покупателями. Описать закон распределения случайной величины Х.

*Решение*:

Очевидно, что сделать покупки могут либо оба покупателя, либо кто-то один, возможно также, что ни один покупатель ничего не купит. Следовательно, х1=2, х2=1, х3=0.

Пусть событие А состоит в том, что первый покупатель сделал покупку, а событие В – в том, что второй покупатель сделал покупку. Тогда вероятность значения х1 может быть подсчитана как вероятность события АВ. Так как А и В – независимые события, то

.

Вероятность значения х2 может быть подсчитана как вероятность события  или , т.е.

.

Учитывая, что  и - события несовместные,



Вероятность значения х3 есть вероятность события :



Соответственно, закон распределения примет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *2* | *1* | *0* |
|  | *0,48* | *0,44* | *0,08* |

***Задача 3*.** Независимые случайные величины *X* и *Y*заданы таблицами распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1* | *2* |  |  | *3* | *4* |
|  | *0,4* | *0,6* |  |  | *0,8* | *0,2* |

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величи­ны *Z=X+Y*.

*Решение*:

Возможные значения случайной величины *Z* равны *z1=4, z2=5, z3=6.*

*P(Z=4)=Р(X=1) Р(Y=3)=0,4 ⋅ 0,8=0,32;*

*Р(Z=5)=Р(X=2) P(Y=3)+Р(X=1)Р(Y=4)=0,56;*

*Р(Z=6)=Р(X=2) Р(Y=4)=0,6 ⋅ 0,2=0,12*.

Полученные значения запишем в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *4* | *5* | *6* |
|  | *0,32* | *0,56* | *0,12* |

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решите все предлагаемые задачи:***

1. Дискретная случайная величина X имеет таблицу рас­пределения вероятностей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *-3* | *3* | *4* |
|  | *0,3* | *0,5* | *0,2* |

Составьте таблицу распределения вероятностей случайных величин Y=X2 , Z=3Х.

1. Составьте таблицу распределения вероятностей для слу­чайной величины Z=X+Y, если X и Y – независимые слу­чайные величины, заданные таблицами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *5* | *6* |  |  | *0* | *1* |
|  | *0,6* | *0,4* |  |  | *0,2* | *0,8* |

1. Вероятность сдачи экзамена первым студентом равна 0,6, а вторым – 0,9. Составить ряд распределения случайной величины Х – числа студентов, успешно сдавших экзамен в случае, когда: а) экзамены пересдавать нельзя; б) экзамен можно один раз пересдать.
2. Перечислите все возможные значения случайной величи­ны X, являющейся числом отличных оценок на экзамене в группе, состоящей из 25 студентов.
3. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,5. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до пер­вого попадания или до полного израсходования всех патронов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте понятие случайной величины.
2. Дайте определение дискретной случайной величины.
3. Дайте определение непрерывной случайной величины.
4. Что называют законом распределения случайной величины?
5. Перечислите способы задания закона распределения дискретной случайной величины.
6. Что называют рядом распределения?
7. Что называют многоугольником распределения?
8. Что называют суммой двух дискретных случайных величин? Запишите формулу.
9. Что называют разностью двух дискретных случайных величин? Запишите формулу.
10. Что называют произведением двух дискретных случайных величин? Запишите формулу.
11. Что называют произведением дискретной случайной величины на число? Запишите формулу.
12. Когда две дискретной случайной величины независимы?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решите все предлагаемые задачи:***

1. Составьте таблицу распределения вероятностей для слу­чайной величины Z=XY, если X и У – независимые случай­ные величины, заданные таблицами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1* | *2* | *3* | *4* |  |  | *3* | *4* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Составьте таблицы распределения вероятностей для слу­чайных величин Z1=X+Y и Z2=ХY, если X и Y – незави­симые случайные величины, заданные таблицами распределения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *5* | *10* |  |  | *0* | *2* | *4* | *6* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. Какие из перечисленных ниже случайных величин являют­ся дискретными: 1) число попаданий в мишень при десяти независимых выстре­лах; 2) отклонение размера обрабатываемой детали от стандарта; 3) число нестандартных изделий, оказавшихся, в партии из 100 изделий; 4) число очков, выпавших на верхней грани при одном подбрасывании игрального кубика?
2. Какие возможные значения может принимать случайная величина Y, означающая число образцов сплавов, используемых при испытании до первого разрушения или до полного израсхо­дования всех образцов, если их имеется 6 штук?
3. Составьте таблицу распределения вероятностей случайно­го числа очков, выпавших на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

**Практическое занятие 9.**

**Тема**: **Интегральная функция распределения вероятностей случайной величины**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Функцией распределения** случайной величины *X*называется функция , которая для любого числа  равна вероятности события {*Х*<*х*}.

Таким образом, по определению

|  |  |
| --- | --- |
| , т.е. . |  |

Функцию называют также **интегральной функцией распределения**.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1*.** Случайная величина Х задана функцией распределения:



Найти вероятности того, что в результате испытания Х примет значение, принадлежащее полуинтервалу [0; 2).

*Решение*:

Так как на полуинтервале [0; 2) , то

.

***Задача 2*.** В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные - черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

*Решение*:

Возможные значения случайной величины Х – числа белых шаров в выборке есть , , , . Вероятности их соответственно будут

, ,

, .

.

Таблица распределения будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* | *2* | *3* |
|  |  |  |  |  |

Теперь будем задавать различные значения *х* и находить для них :

1. Если , то ;
2. Если , то ;
3. Если , то ;
4. Если , то 

;

1. Если , то 



Итак,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Как видим, функция распределения дискретной случайной величины Х - разрывная, со скачками *рi* в точках *хi*, функция, непрерывная слева (при переходе к точке разрыва слева функция *F*(*x*) сохраняет свое значение). Ее график имеет ступенчатый вид.

***Задача 3*.** Случайная величина Х задана функцией распределения вероятностей



Найти вероятность попадания случайной величины Х в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

*Решение*:

Вероятность попадания случайной величины Х в интервалы будет равна:

P(1<X<2,5)=F(2,5) −F(1)=0,52−0=0,25;

P(2,5<X<3,5)=F(3,5) −F(2,5)=1−0,25=0,75;

***Задача 4*.** Дискретная случайная величина X задана сле­дующей таблицей распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
|  | *0,1* | *0,15* | *0,2* | *0,35* | *0,2* |

Найдем интегральную функцию распределения.

*Решение*:

Для дискретной случайной величины ;

следовательно,

если х ≤ 1, то F(х) = 0;

если 1 < х ≤ 2, то F(х) = 0,1;

если 2 < х ≤ 3, то F(х) = 0,1 + 0,15 = 0,25;

если 3 < х ≤ 4, то F(х) = 0,1 + 0,15 + 0,2 = 0,45;

если 4 < х ≤ 5, то F(х) = 0,1 + 0,15 + 0,2 + 0,35 = 0,8;

если х > 5, то F(х) = 0,1 + 0,15 + 0,2 + 0,35 + 0,2=1.

Таким образом,



***Задача 5*.** Случайная величина X задана следующей интегральной функцией распределения вероятностей:



Найдем вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение в интервале (0,5; 1,5).

*Решение*:

Вероятность того, что случайная величина в результате ис­пытания примет значение в интервале (0,5; 1,5), т.е. P(0,5 < х < 1,5), можно вычислить по формуле (43), с учетом того, что интервал (0,5; 1,5) лежит внутри промежутка (0; 2). Итак,



2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Решите все предлагаемые задачи:***

**1.** Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,8. Найти и построить функцию распределения случайной величины Х – число попаданий в мишень.

Вычислить вероятности попадания случайной величины Х в интервал (1,5; 2,5) и (2,5; 3,5).

**2.** Случайная величина Х задана функцией распределения



Вычислить вероятности попадания случайной величины Х в интервал (1,5; 2,5) и (2,5; 3,5).

Найдите вероятность того, что в результате испытания Х примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

**3.** Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос дано по 5 ответов, среди которых имеется один пра­вильный. Составьте таблицу распределения вероятностей случайно­го числа X правильных ответов, полученных при простом угады­вании, и найдите интегральную функцию распределения вероятно­стей этой случайной величины.

**4.** Монета подбрасывается 3 раза. Для случайного числа появления герба: а) найдите интегральную функцию распределения вероятностей, б) найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**5.** Случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей



Найдите вероятность того, что: а) в результате испытания случай­ная величина X примет значение, заключенное в интервале (1,75; 2); б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X оба раза примет значение из интервала (1,7; 1,9).

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение функции распределения случайной величины.
2. Как обозначают функцию распределения случайной величины?
3. Запишите формулу функции распределения случайной величины.
4. Как по-другому называют функцию распределения случайной величины?
5. Сформулируйте и запишите свойства функции распределения случайной величины.
6. Дайте определение непрерывной случайной величины через функцию распределения.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Решите все предлагаемые задачи:***

**1.** Случайная величина Х задана функцией распределения



Вычислить вероятности попадания случайной величины Х в интервал (1,5; 2,5) и (2,5; 3,5).

**2.** Случайная величина Х задана функцией распределения



Найдите вероятность того, что в результате испытания Х примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

**3.** Убедиться, что функция  является функцией распределения некоторой случайной величины. Найти  и построить график F(*x*).

**4.** Дана функция распределения



Найти вероятность того, что в результате четырех испытаний случайная величина Х трижды примет значение, принадлежащее интервалу (0, 1).

**5.** Случайная величина *X* задана интегральной функцией  Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение в интервале (–1; 0).

**Практическое занятие 10.**

**Тема**: ***Плотность распределения, определение числовых характеристик для непрерывных случайных величин***

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Плотностью распределения вероятностей** (*плотностью распределения*, *плотностью вероятностей*или просто *плотностью*) непрерывной случайной величины *X*называется производная ее функции распределения.

Обозначается плотность распределения непрерывной случайной величины *X*через (или ) или просто (или ), если ясно о какой случайной величине идет речь.

Таким образом, по определению

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Функцию называют также **дифференциальной функцией распределения**. Она является одной из форм закона распределения случайной величины, существует только для непрерывных случайных величин.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1*.** Дана интегральная функция непрерывной слу­чайной величины X:

Найти плотность вероятности *f(х)* и вероятность того, что в резуль­тате испытания случайная величина X примет значение в интервале (0,5; 1,5).

*Решение*:

Так как *f(х) = F'(х)*, то 

Для того чтобы найти вероятность попадания случайной величины в интервал (0,5; 1,5), вычислим площадь криволинейной трапеции:

.

***Задача 2*.** Плотность вероятности непрерывной случайной величины Х



Найти функцию распределения F(х) и построить ее график.

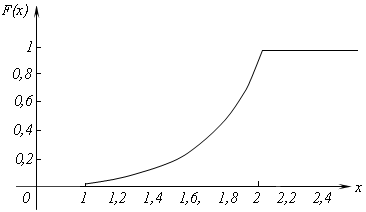
*Решение*.

**если х≤1,

**, если 1 < х ≤ 2,

**

, если х > 2. График функции распределения приведен ниже (рис. 1).



*Рис. 1*

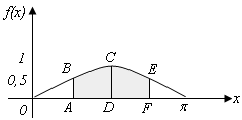
***Задача 3*.** Плотность вероятности случайной величины имеет вид:



Покажем, что вероятности попадания случайной величины в интервалы  и  равны между собой, а математическое ожидание случайной величины равно .

*Решение*.

График функ­ции у = *f(х)* изображен на рисунке:



Так как этот график симметричен относительно прямой х =, то:

1) М(Х) = ;

Рис. 2

2) площади криволинейных трапеций ABCD и DCEF равны между собой. А площадь криволинейной трапеции равна вероят­ности попадания случайной величины в интервал, являющийся основанием этой трапеции. Следовательно,

.

***Задача 4*.** Дана плотность вероятности непрерывной слу­чайной величины X:



Найдем интегральную функцию F(х), предварительно вычислив значение параметра А.

*Решение*:

Так как все значения случайной величины X принадлежат интервалу , то получим:  или , т.е. 2А=1. Откуда .

При x≤0 

При 0<x≤π .

При х>π 

Таким образом: 

***Задача 5*.** Плотность распределения случайной величины Х задана функцией . Найти значение параметра *а*.

*Решение*:

Согласно свойству 4 плотности, имеем , т.е. , т.е.  или  и, наконец, получаем , т.е. .

***Задача 6*.** Случайная величина X задана плотностью вероятности  в интервале (10; 12), вне этого интервала *f(х)=0*. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

*Решение*:

Найдем математическое ожидание: .

Дисперсию случайной величины равна:  .

Зная дисперсию, найдем среднее квадратичное отклонение: .

***Задача 7*.** Случайная величина X задана плотностью вероятности *f(х)=2х* в интервале (0; 1), вне, этого интервала *f(х)=0*. Найдем математическое ожидание и дисперсию слу­чайной величины Y = X2.

*Решение*:

; .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу:***

**1.1.** Случайная величина Х задана функцией распределения



Найти плотность распределения случайной величины.

**1.2.** Случайная величина Х задана функцией распределения



Найти значение *а*, построить графики *F*(*x*) и *f*(*x*).

**1.3.** Дана интегральная функция случайной величины X: 

1) Найдите плотность вероятности *f(х)*. 2) Вычислите вероятность того, что в результате испытания случайная величина попадет в интервал (–0,5; 0) (двумя способами): а) используя свойства интегральной функции; б) используя свойства функции *у = f(х).*

**1.4.** Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:



1) Найдите параметр *а*.2) Постройте график функции у = *f(х)*. 3) Используя свойства графика, найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (1; 2).

**1.5.** Случайная величина Х имеет плотность вероятности



Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

**Задание 2. Решить задачу:**

**2.1.** Случайная величина X задана плотностью вероятности:



Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной ве­личины *Y = sinX*.

**2.2.** Плотность вероятности непрерывной случайной величины Х задана в виде . Найти параметр С.

**2.3.** Дана плотность вероятности случайной величины X:



Найдите параметр А.

**2.4.** По условию предыдущей задачи найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

**2.5.** Дана плотность вероятности случайной величины X:



Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной ве­личины *Y = X – 1*.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Запишите формулу плотности распределения непрерывной случайной величины.
2. Дайте определение плотности распределения непрерывной случайной величины.
3. Сформулируйте свойства плотности распределения непрерывной случайной величины.
4. Поясните геометрический смысл плотности вероятности.
5. Дайте определение непрерывной случайной величины через плотность распределения.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу:***

**1.1.** Дана интегральная функция непрерывной случайной ве­личины X:



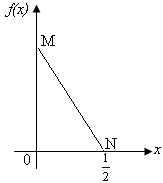
Найдите плотность вероятности*f(х)*.

**1.2.** Дана интегральная функция случайной величины X:

.

1) Найдите плотность вероятности *f(х)* и постройте ее график. 2) Исследуя график функции у = *f(х)*, докажите, что: а) вероятности принятия случайной величиной положительных и отрицательных значений равны между собой; б) математическое ожидание X равно нулю.

**1.3.** Кривая распределения непрерывной случайной величины Х имеет вид.

****

Найти выражение для , функцию распределения , вероятность события .

**1.4.** Является ли плотностью распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций: а)  при ; б) 

в) 

**1.5.**Случайная величина Х имеет плотность вероятности



Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

**Задание 2. Решить задачу:**

**2.1.** Случайная величина X имеет плотность вероятности



Найдите интегральную функцию F(х), постройте ее график и определите по графику вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале .

**2.2.** Дана плотность вероятности случайной величины X:



Найдите интегральную функцию F(*х*).

**2.3.** Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения



Найти математическое ожидание случайной величины Х.

**2.4.** Случайная величина Х задана функцией распределения



Найти значения А и В, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

**2.5.** Случайная величина X задана плотностью вероятности:



Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной ве­личины Y = X3.

**Практическое занятие 11.**

**Тема**: **Определение числовых характеристик дискретных случайных величин**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Математическим ожиданием**(или *средним значением*) **дискретной** случайной величины *X*, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности. Математическое ожидание обозначается через *MX*(или: *М*[*Х*], *М*(*Х*), *ЕХ*, , ) и определяется формулой:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Если число возможных значений случайной величины *X*бесконечно (счетно), то

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

**Дисперсией** (*рассеянием*) случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания. Обозначается дисперсия через *DX*(или *D*[*X*], , *D*(*X*)). Таким образом, по определению

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

**Средним квадратическим отклонением**или **стандартным отклонением** случайной величины *X*называется квадратный корень из ее дисперсии, обозначают через (или *σХ*, *σ*[*Х*], *σ*). Таким образом, по определению

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Случайную величину  называют **стандартной случайной величиной**. Ее математическое ожидание равно 0, а дисперсия равна 1.

**Модой**дискретной случайной величины *X*называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями, обозначается через .

**Медианой** непрерывной случайной величины *X*называется такое ее значение , для которого

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

**Начальным моментом** порядка *k* случайной величины *X*называется математическое ожидание *k*-й степени этой величины, обозначается через . Таким образом, по определению

.

**Центральным моментом** порядка *k* случайной величины *X*называется математическое ожидание величины , обозначается через . Таким образом, по определению

.

Центральные моменты могут быть выражены через начальные моменты:

.

**Коэффициентом асимметрии** («*скошенности*») *А* случайной величины *X*называется величина

.

**Коэффициентом эксцесса** («*островершинности*») *Е* случайной величины *X*называется величина



**Квантилью** уровня *р*случайной величины*X*называется решение уравнения

,

где *р* - некоторое число, 0 <*р*<1.

**Производящей функцией**для дискретной случайной величины *X*называется функция вида

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

где *z* - произвольный параметр, 0 <z≤ 1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1***. В денежной лотерее разыгрываются 1 выигрыш в 100000 р., 10 выигрышей по 10000 р., и 100 выигрышей по 100 р. при общем числе билетов 10000. Найти математическое ожидание выигрыша Х.

*Решение*:

Учитывая, что возможные значения для *Х* есть:

*х*1=0, *х*2=100, *х*3=10000, *х*4=100000,

а их вероятности

*р*2=0,01, *р*3=0,001, *р*4=0,0001, *р*1=1−0,01−0,001−0,0001=0,9889,

находим закон распределения выигрыша Х, который может быть задан таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *0* | *100* | *10000* | *100000* |
| *р* | *0,9889* | *0,01* | *0,001* | *0,0001* |

Используя полученную таблицу, имеем





Очевидно, *М*(*Х*)=21 р. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

***Задача 2***. Найти математическое ожидание случайной величины *Z=X+2Y*, если известны математические ожидания случайных величин *Х* и *Y*: *М*(*Х*)=5, *М*(*Y*)=3.

*Решение*:

Используя свойства математического ожидания, получаем

*М*(*Z*)=*M*(*X+2Y*)=*M*(*X*)+*M*(2*Y*)=*M*(*X*)+2*M*(*Y*)=5+2⋅3=11.

***Задача 3***. Независимые случайные величины заданы законами распределения

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *1* | *2* |  | *Y* | *0,5* | *1* |
| *Р* | *0,2* | *0,8* |  | *р* | *0,3* | *0,7* |

Найти математическое ожидание случайной величины *ХY*.

*Решение*:

Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

*М*(*Х*)=1⋅0,2+2⋅0,8=1,8 *М*(*Y*)=0,5⋅0,3+1⋅0,7=0,85

Случайные величины Х и Y независимы, поэтому искомое математическое ожидание *М*(*ХY*)= *М*(*Х*) ⋅*М*(*Y*)=1,8 ⋅ 0,85= 1,53.

***Задача 4***. Дисперсия случайной величины *Х* равна 3. найти дисперсию следующих величин: а) −3*Х*; б) 4*Х*+3.

*Решение*:

Согласно свойствам дисперсии имеем

а) *D*(−3*Х*)=9*D*(*Х*)=9⋅3=27; б) *D*(4*Х*+3)= *D*(4*Х*)+ *D*(3) = 16*D*(*Х*)+0=16⋅3=48.

***Задача 5***. Случайная величина *Х* – число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить σ(*Х*).

*Решение*:

Имеем  ;

 ;

.

***Задача 6***. Случайная величина X задана следующей таб­лицей распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *2* | *5* | *8* | *9* |
|  | *0,1* | *0,4* | *0,3* | *0,2* |

Найдем *М(X), D(X)*, .

*Решение*:

Так как известна таблица распределения ве­роятностей, то

*М*(*X*)=2 ⋅ 0,1+5 ⋅ 0,4+8 ⋅ 0,3+9 ⋅ 0,2=6,4.

Для вычисления D(X) найдем сначала М(X2): М(X2)=4 ⋅ 0,1+25 ⋅ 0,4+64 ⋅ 0,3+81 ⋅ 0,2=45,8.

*D*(*X*)=45,8–6,42=4,84. И, наконец .

***Задача 7***. Найдем математическое ожидание и диспер­сию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, ес­ли приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

*Решение*:

Пусть *X* – число лотерейных билетов, на ко­торые выпали выигрыши. Случайная величина *X* имеет биноми­альное распределение, так как испытания, рассматриваемые в за­даче, удовлетворяют схеме Бернулли. Поэтому

М(X)=100 ⋅ 0,05=5, D (X)=100 ⋅ 0,05 ⋅ 0,95=4,75.

***Задача 8***. Три стрелка независимо друг от друга стре­ляют по одной цели. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,7, второго – 0,8 и третьего – 0,9. Найдите мате­матическое ожидание числа попаданий в цель.

*Решение*:

Пусть случайная величина *X*1 – число попа­даний в цель для первого стрелка, *Х*2 – число попаданий в цель для второго стрелка, *Х*3 – число попаданий в цель для третьего стрелка. Тогда случайная величина Z *=Х*1+*Х*2+*Х*3 – число попаданий в цель трех стрелков. Но математическое ожидание суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их математических ожиданий. Следовательно, *M*(*Z*)=*М*(*X*1)+*М*(*Х*2)+*М*(*Х*3).

Таблица распределения вероятностей случайной величины *X*1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* |
|  | *0,3* | *0,7* |

следовательно, *М*(*X*1)=0,7. Аналогично *М*(*Х*2)=0,8 и *М*(*Х*3)=0,9.

Значит, *М*(*Z*)=0,7+0,8+0,9=2,4.

***Задача 9***. Дискретная случайная величина *Х* задана законом распределения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Х* | *1* | *3* |
| *р* | *0,4* | *0,6* |

Найти начальные моменты первого, второго порядков и центральный момент второго порядка.

*Решение*:

Имеем ;

 ,

.

***Задача 10*.** Случайная величина X задана плотностью вероятности  в интервале (10; 12), вне этого интервала *f(х)=0*. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

*Решение*:

Найдем математическое ожидание:

.

Дисперсию случайной величины равна:  .

Зная дисперсию, найдем среднее квадратичное отклонение: .

***Задача 11*.** Случайная величина X задана плотностью вероятности *f(х)=2х* в интервале (0; 1), вне, этого интервала *f(х)=0*. Найдем математическое ожидание и дисперсию слу­чайной величины Y = X2.

*Решение*:

; .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу:***

**1.1.** В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 10 руб., 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

**1.2.** Пусть Х и У – независимые дискретные случайные величины, причем М(Х)=2, М(У)= −3 D(Х)=2, D(У)=9. Найти M(Z) и D(Z), если Z=5X−3Y+2.

**1.3.** Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины *X*, заданной таблицей распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *2* | *3* | *6* | *7* | *8* | *10* |
|  | *0,1* | *0,2* |  | *0,2* | *0,15* | *0,1* |

До выполнения задания вычислите вероятность того, что слу­чайная величина примет значение *х=6*.

**1.4.** Производится три независимых выстрела по цели. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны *р*=0,9. Найти математическое ожидание числа попаданий. Решить задачу в случае, если вероятности попадания в цель при разных выстрелах различны: , , .

**1.5.** В магазин поступили электролампы с трех заводов в пропорции 2:3:5. Доля брака в продукции первого завода – 5%, второго – 2%, третьего – 3%. Покупатель приобрел 3 лампочки. Найти а) математическое ожидание и б) среднее квадратичное отклонение числа качественных лампочек среди купленных.

**Задание 2. *Решить задачу:***

**2.1.** Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,2. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожи­дать в среднем 5 попаданий в цель?

**2.2.** Стороны прямоугольного участка Х и Y в результате погрешностей измерения оказываются случайными величинами с такими распределениями:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *19,5* | *19,7* | *20,0* | *20,2* |
| *Р* | *0,20* | *0,05* | *0,70* | *0,05* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y* | *29,5* | *29,8* | *30,0* | *30,1* |
| *р* | *0,15* | *0,15* | *0,65* | *0,005* |

Найти математическое ожидание площади участка, если известно, что измерения проводились независимыми способами.

**2.3.** Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бракованных деталей, если проверяется партия из 10 000 деталей, а вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,005.

**2.4.**Независимые случайные величины X и У заданы следую­щими таблицами распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *2* | *3* | *4* |  |  | *1* | *2* | *3* |
|  | *0,6* | *0,3* | *0,1* |  |  | *0,1* | *0,2* | *0,7* |

Найдите математическое ожидание случайной величины *Z=XY* двумя способами: а) составив предварительно таблицу распреде­ления вероятностей случайной величины *Z*, б) используя свойство *М(XY)=М(Х)М(У)*.

**2.5.**Случайные величины *X*и *У* имеют *М(X)=4*, *М(У)=5,5*. Найдите математическое ожидание случайной величины *Z= 2X+3У–1,5*.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.
2. Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины.
3. Дайте определение среднего квадратического отклонения.
4. Какую случайную величину называют стандартной случайной величиной?
5. Дайте определения моды и медианы.
6. Что называют начальным моментом порядка k?
7. Дайте определение центрального момента порядка k.
8. Запишите формулы выражающие центральные моменты через начальные.
9. Что называют коэффициентом асимметрии?
10. Какую величину называют коэффициентом эксцесса.
11. Что называют квантилью?
12. Дайте определение производящей функции. Запишите формулу.
13. Как связана производящая функция с начальными моментами?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу:***

**1.1.** Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины Х, заданной рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
| *р* | *0,2* | *0,1* | *0,3* | *0,4* |

**1.2.** Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *2* | *4* | *6* | *8* |  |  | *Y* | *0* | *1* | *2* |
| *р* | *0,4* | *0,2* | *0,1* | *0,3* |  |  | *р* | *0,5* | *0,2* | *0,3* |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=2X+3Y.

**1.3.** В апреле среднесуточная температура воздуха для неко­торой местности удовлетворяет следующему закону распределе­ния вероятностей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Найдите математическое ожидание *М(t)* среднесуточной темпе­ратуры.

**1.4.**Независимые случайные величины X и У заданы следую­щими таблицами распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *3* |
|  | *0,1* | *0,2* | *0,25* | *0,35* | *0,1* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *-3* | *0* | *1* | *2* |
|  | *0,1* | *0,2* | *0,4* | *0,3* |

Значения какой из этих случайных величин более рассеяны от их средних значений? Найдите М(X+У) и D(X+У).

**1.5.** На факультете успеваемость составляет 90%. Наудачу выбираются 40 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа успевающих студентов, оказавшихся в выбранной группе.

**Задание 2. *Решить задачу:***

**2.1.** Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа произве­денных выстрелов.

**2.2.** В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Приняв за случайную величину Х число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

**2.3.** Дискретная случайная величина Х задана законом распределения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Х* | *3* | *5* |
| *Р* | *0,2* | *0,8* |

Найдите начальные моменты первого и второго порядков и центральный момент второго порядка.

**2.4.**Математическое ожидание и дисперсия случайной вели­чины X соответственно равны М(X)=7; D(X)=1,2. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) 2Х–3; б) 4Х; в) 3Х + 5.

**2.5.**Испытывается устройство, состоящее из пяти независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов соответствен­но равны *0,05; 0,06; 0,08; 0,09; 0,1*. Найдите математическое ожи­дание и дисперсию случайного числа отказавших приборов.

**Практическое занятие 12.**

**Тема**: **Практическое применение законов распределения случайных величин**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Основные законы распределения случайных величин**

***Биномиальный закон распределения***

Дискретная случайная величина *X*имеет **биномиальное распределение**(или распределена по биномиальному закону), если она принимает значения , с вероятностями:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

где , , .

Если требуется вычислить вероятность ,то имеем:

.

Вероятность  бывает удобно находить через вероятность противоположного события:

.

Числовые характеристики биномиального распределения:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

***Распределение Пуассона***

Дискретная случайная величина *X*имеет **распределение Пуассона**, если ее возможные значения: (счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

где ;  - параметр.

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*, распределенной по закону Пуассона имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

***Геометрическое распределение***

Дискретная случайная величина *X*имеет **геометрическое распределение**, если ее возможные значения: 1, 2, 3, 4, ..., а вероятности этих значений:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

где 

Математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения:

,  и значит .

***Гипергеометрический закон распределения***

Дискретная случайная величина *X*имеет **гипергеометрическое распределение**, если она принимает значения с вероятностями

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.29) |

где , *М ≤ N*, *m≤ n*, *n≤ N*; *n*, *М*, *N* - натуральные числа.

Математические ожидания дискретной случайной величины *X*, имеющей гипергеометрическое распределение, есть

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.30) |

а ее дисперсия

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

***Равномерный закон распределения***

Непрерывная случайная величина *X*имеет равномерное распределение на отрезке [*а*, *b*], если ее плотность вероятности *f*(*x*) постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*МХ* и *DX* случайной величины *X*~ *R*[*а*, *b*] имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , . |  |

Дискретная случайная величина *Х* имеет равномерное распределение, если она принимает целочисленные значения с вероятностью , где .

В этом случае , .

***Показательный закон распределения***

Непрерывная случайная величина *X*имеет **показательный**(или *экспоненциальный*) закон распределения, если ее плотность вероятности имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где  - параметр распределения.

Математическое ожидание и дисперсия показательного распределения имеют вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , , . |  |

***Нормальный закон распределения***

Непрерывная случайная величина *Х* распределена по **нормальному закону** с параметрами *а* и , если ее плотность распределения имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Математическое ожидание случайной величины *X*~*N*(*а*, σ) имеет вид: , ее дисперсия , где σ – среднее квадратичное отклонение.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

*Указания***.** Анализ и решение задач, в которых требуется составить таблицу распределения вероятностей случайной вели­чины, рекомендуется делать по следующей схеме:

1. Установите, что является случайной величиной в рассматри­ваемой задаче.
2. Перечислите все возможные значения случайной величины.
3. Из условия задачи установите закон распределения вероят­ностей случайной величины.
4. Используя соответствующую формулу, найдите вероятности появления возможных значений случайной величины.
5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины и проверьте, что 

***Задача 1*.** Составьте таблицу распределения вероятностей числа попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна *0,2*.

*Решение*:

Случайная величина*X* есть число попаданий в мишень. Так как производятся три независимых выстрела, то случайная величина может принимать следующие значения:

*х1=0, х2=1, х3=2, х4=3*.

Случайная величина *X* имеет биномиальное распределение вероятностей, поскольку испытания, рассматривае­мые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По формуле

,

где *m=0,1,2,3*, находим:

*Р(X=0)=0,512, Р(X=1)=0,384, Р(X=2)=0,096, Р(X=3)= 0,008*.

Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайней величины X:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* | *2* | *3* |
|  | *0,512* | *0,384* | *0,096* | *0,008* |

Проверка: .

***Задача 2*.** Среди 10 лотерейных билетов имеются 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Написать Закон распределения вероятностей числа выигрышных билетов среди купленных.

*Решение*:

Пусть *Х* – случайная величина числа выигрышных билетов среди купленных 2 билетов. Очевидно она может принимать значения:

*х*1=0, *х*2=1, *х*3=2.

Для определения вероятности появления каждого из этих значений воспользуемся следующей формулой



где

m=0, 1, 2 – число выигрышных билетов среди наудачу купленных n=2 билетов;

N=10 – всего имеющихся билетов;

М=4 – число выигрышных среди всех 10 билетов.

Далее вычисляем соответствующие вероятности:

, , .

Для проверки вычислений сложим

.

Следовательно, искомый закон распределения имеет вид

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* | *2* |
|  |  |  |  |

***Задача 3*.** Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд распределения числа попаданий мяча в корзину.

*Решение*:

Пусть *Х* – случайная величина числа попаданий мяча в корзину. Баскетболист может не попасть ни разу, один раз, два раза и все три раза, т.е. *х*1=0, *х*2=1, *х*3=2, *х*4=3. Вероятности вычисляем по формуле Бернулли, при этом *n*=3, *р*=0,7, *q*=0,3:

*,*

,

,

.

Сделаем проверку, вычислив .

Тогда ряд распределения случайной величины числа попаданий мяча в корзину при трех бросках примет вид

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* | *2* | *3* |
|  | *0,027* | *0,189* | *0,441* | *0,343* |

***Задача 4*.** Поезда метро идут с интервалом в 2 минуты. Пассажир появляется на перроне в произвольный момент времени. Время ожидания поезда есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение вероятностей. Найдем плотность ве­роятности, интегральную функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

*Решение*:

Из условия задачи *а* = 0, *b*= 2. Тогда, при­меняя формулу

 получим: 

Формула  позволяет найти интегральную функцию распре­деления.

При x≤0 .

При 0<x≤2 .

При х>2 .

Следовательно, 

Так как график функции *у=р*(*х*) симметричен относительно пря­мой *х*=1, то *М*(*X*)=1.

Дисперсию случайной величины X найдем по формуле



.

***Задача 5*.** Событие, состоящее из мгновенного сигнала, должно произойти между одним и пятью часами. Время ожидания сигнала есть случайная величина X, имеющая равномерное рас­пределение. Какова вероятность того, что сигнал будет зафикси­рован в течение 20 мин после двух часов?

*Решение*:

Случайная величина X имеет равномерное рас­пределение в интервале (1; 5). Найдем вероятность того, что при испытании ее возможное значение попадет в интервал . По формуле  имеем:.

***Задача 6*.** На отрезке [*a*; b] наугад указывают точку. какова вероятность того, что эта точка окажется в левой половине отрезка?

*Решение*:

Пусть Х – случайная величина, равная координате выбранной точки. Х распределена равномерно (в этом и состоит точный смысл слов: «наугад указывают точку»), а так как середина отрезка [*a*; b] имеет координату , то искомая вероятность равна

.

***Задача 7*.** В круг радиуса R вписан правильный тре­угольник. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка кру­га окажется внутри треугольника?

*Решение*:

Пусть событие *А* состоит в том, что наудачу вы­бранная точка круга окажется внутри треугольника. Так как точка выбирается наудачу, то для вычисления вероятности со­бытия применим формулу . Следовательно,

.

***Задача 8*.** Две точки независимо друг от друга выбирают­ся наудачу внутри круга радиуса R. Какова вероятность того, что обе точки окажутся внутри вписанного в этот круг квадрата?

*Решение*:

Испытание состоит в том, что две точки выби­раются наудачу внутри круга. Пусть события A и B означают соответственно попадание первой и второй точки внутрь квадрата. Тогда событие AB означает, что обе точки оказались внутри квадрата. События A и B являются независимыми. Следовательно, р(AB)= p(A) p(B). Так как точки выбираются наудачу, то для вычисления вероятностей событий А и В применив фор­мулу ,

получим

.

Значит, .

***Задача 9*.** Внутри круга радиуса R наудачу выбирают точку. Необходимо найти интегральную функцию распределения вероятностей случайной величины X, являющейся расстоянием точки до центра круга, и плотность вероятности.

*Решение*:

Для того чтобы найти интегральную функцию случайной величины X, вычислим Р(Х < х), где 0 < х ≤R. Следовательно, необходимо найти вероятность того, что точка окажется внутри круга, концентрического с данным, радиус ко­торого равен х. Так как точка выбирается наудачу, то для вычисле­ния Р(Х < х) применим формулу

,

т.е.

, где 0<x≤R.

Отсюда 

Зная функцию распределения вероятностей F(x), получим плотность вероятности:



***Задача 10*.** Случайная величина Х распределена равномерно на отрезке [1; 6]. Найти функцию распределения F(х), математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины.

*Решение*:

Плотность вероятности для величины Х имеет вид 

Следовательно, функция распределения, запишется следующим образом



Находим математическое ожидание и дисперсию:

 ,

а среднее квадратичное отклонение будет равно .

***Задача 11*.** Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией 4. Найдем выражение для плотности вероятности этой случайной величины.

*Решение*:

Плотность вероятности случайной величины X имеет вид



Из условия задачи *а* = 3, . Следовательно,

.

***Задача 12*.** Срок службы прибора представляет собой слу­чайную величину, подчиненную нормальному закону распределе­ния, с гарантией на 15 лет и средним квадратичным отклонением, равным 3 годам. Определим вероятность того, что прибор прослу­жит от 10 до 20 лет.

*Решение*:

По условию задачи *а* = 15, σ = 3, α= 10, β = 20. Требуется найти Р (10 <X< 20). Применяя формулу (67), получим:

.

Из таблицы функции Лапласа находим, что Ф(1,67)=0,4525.

Следовательно, Р(10 <X< 20) = 0,9050.

***Задача 13*.** Распределение веса консервных банок, вы­пускаемых заводом, подчиняется закону нормального распределе­ния со средним весом 250 г и средним квадратичным отклонением, равным 5 г. Определим вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.

*Решение*:

По условию задачи *а* = 250, σ = 5, α= 8. Требуется найти вероятность события

(|Х–250|≤ 8). Применяя формулу , получим:



Из таблицы функции Лапласа находим, что Ф(1,6)=0,4452.

Следовательно, Р(|Х – 250|≤ 8)≈0,8904.

***Задача 14*.** Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна m=40 см и среднее квадратичное отклонение равно σ=0,4 см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

*Решение*:

Необходимо найти положительное число ε, для которого P(|X-40|<ε)=0,8. Так как

,

то задача сводится к решению неравенства Ф(1,77ε)>0,8. С помощью таблицы функции Лапласа устанавливаем, что 1,77ε>0,91. Далее находим наименьшее значение ε, удовлетворяющее этому неравенству, откуда ε=0,52.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу*:**

1. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные - черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа белых шаров в выборке.
2. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Найти закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Построить многоугольник распределения.
3. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число появления герба: а) при одном под­брасывании монеты; б) при десяти подбрасываниях монеты?
4. Вероятность того, что составление бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3. Аудитору на заключение представлено 3 баланса предприятия. Составить закон распределения числа положительных заключений на проверяемые балансы.
5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайно­го числа очков, выпавших на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

**Задание 2. *Решить задачу*:**

1. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекают 3 работы. Составьте таблицу распре­деления числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке.
2. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Составьте таблицу распределения вероят­ностей случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9. Используя полученную таблицу, найдите Р(X<4).
3. Имеются 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут 3 билета. Составьте таблицу распределения вероятностей числа билетов первого ряда, оказавшихся в выбор­ке. Используя полученную таблицу, найдите Р(X<3).
4. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 600 деталей, а вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,005.
5. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке [2; 8]. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток (3; 5).

**Задание 3. *Решить задачу*:**

1. Случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей. Найдите плотность вероятности, если математиче­ское ожидание случайной величины X равно 8, а дисперсия рав­на .
2. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 мин. Считая, что случайная величина Х – время ожидания автобуса – распределена равномерно, найти среднее время ожидания (математическое ожидание) и среднее квадратичное отклонение случайной величины.
3. Из фиксированной вершины квадрата со стороной а про­извольным радиусом, меньшим его диагонали, проведена окруж­ность. Какова вероятность того, что она пересечет стороны квадра­та, которым принадлежит данная вершина?
4. Шарик радиуса r = 2 см наудачу бросают в круг радиуса R=25 см, в котором вырезано квадратное отверстие со сторо­ной *а*=14 см. Какова вероятность того, что шар пройдет через это отверстие, не задев его края, если он непременно попадет в круг?
5. В течение 20 мин после девяти часов ученик А в случай­ный момент времени звонит по телефону ученику В, ждет 2 мин, после чего кладет трубку. В течение тех же 20 мин ученик В заходит в свою квартиру в случайный момент и остается дома в течение 4 мин. Какова вероятность того, что разговор между уче­никами состоится?

**Задание 4. *Решить задачу*:**

1. Внутри шара радиуса R– некоторым способом наудачу вы­бирается точка. Необходимо найти *F*(*х*) и *f(х)* случайной вели­чины X, выражающей расстояние точки до центра шара.
2. Математическое ожидание нормально распределенной величины Х равно Мх=5, Dх=9. Написать выражение для плотности вероятности.
3. Максимальное значение плотности вероятности случайной величины X, подчиненной нормальному закону распределения, равно . Найдите среднее квадратичное отклонение и дисперсию этой случайной величины.
4. Используя свойства кривой плотности вероятности слу­чайной величины X, подчиненной нормальному закону распреде­ления, найдите ее математическое ожидание, если известно, что Р(–∞<X< –3) = Р (7 <X< +∞). Сделайте чертеж.
5. Случайная величина X распределена нормально и имеет плотность вероятности . Найдите математическое ожидание случайной величины *Y=4х –2* (также подчиненной нормальному закону распределения вероят­ностей).

**Задание 5. *Решить задачу*:**

1. Случайная величина Х распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратичным отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет случайная величина.
2. Случайная величина *X*подчинена нормальному закону распределения с параметрами *а* = 0 и σ =2. Найдите интервал (α; β), в котором эта случайная величина принимает свои воз­можные значения с вероятностью 0,61, если известно, что *α = −β*.
3. Случайная величина *X*— отклонение размера детали от стандарта - имеет нормальное распределение вероятностей со сред­ним квадратичным отклонением, равным 0,2. Систематическая ошибка отсутствует. Найдите вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск ± 0,5.
4. При измерении детали ее длина *X*является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами *а* = 22 см и σ =0,2 см. Найдите интервал, в который с вероят­ностью 0,9544 попадает *X.*
5. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой группы наудачу отбирается 3 студента. Составить зпкон рапределения дискретной случайной величины Х – числа девушек из отобранных студентов. Найти М(Х).

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте биноминальный закон распределения.
2. Чему равно математическое ожидание и дисперсия случайной величины распределенной по биномиальному закону?
3. Дайте определение распределения Пуассона.
4. Чему равно математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение Пуассона?
5. Сформулируйте определение для геометрического закона распределения.
6. Чему равно математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины распределенной по геометрическому закону?
7. Сформулируйте гипергеометрический закон распределения.
8. Чему равно математическое ожидание и дисперсия случайной величины распределенной по гипергеометрическому закону?
9. Сформулируйте равномерный закон распределения.
10. Чему равно математическое и дисперсия ожидание равномерно распределенной случайной величины?
11. Сформулируйте равномерный закон распределения для дискретных случайных величин.
12. Чему равны математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной дискретной случайной величины?
13. Сформулируйте показательный закон распределения.
14. Чему равно математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины распределенной по показательному закону?
15. Сформулируйте нормальный закон распределения.
16. Чему равно математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины?
17. В чем заключается правило трех сигм?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу*:**

1. Монета бросается 4 раза. Построить многоугольник распределения случайной величины Х – числа выпадения герба.
2. Какие возможные значения может принимать случайная величина Y, означающая число образцов сплавов, используемых при испытании до первого разрушения или до полного израсхо­дования всех образцов, если их имеется 6 штук?
3. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 карандаша красные. Наудачу извлекаются 3 карандаша. Какой закон распре­деления вероятностей имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?
4. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайного числа появления герба составьте таблицу и постройте многоугольник распределения вероятностей.
5. По одному и тому же маршруту в один и тот же день со­вершают полет 3 самолета. Каждый самолет с вероятностью 0,7 может произвести посадку по расписанию. Для случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания, составьте таблицу рас­пределения вероятностей.

**Задание 2. *Решить задачу*:**

1. В лотерее из 100 билетов разыгрываются два выигрыша на сумму 200 руб. и 60 руб. Стоимость билета 10 руб. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего два билета.
2. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,5. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до пер­вого попадания или до полного израсходования всех патронов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов.
3. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа страниц с опечатками, если проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025.
4. Закон равномерного рас­пределения вероятностей слу­чайной величины X задан плот­ностью вероятности



Найдите интегральную функцию случайной величины X.

1. Случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей на интервале (4; 10). Найдите ее математическое ожи­дание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

**Задание 3. *Решить задачу*:**

1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины Х.
2. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин – случайная величина Х – распределена равномерно, определить среднее время ожидания автомашиной прихода парома и дисперсию времени ожидания.
3. Два действительных числа х и у выбираются наудачу так, что сумма их квадратов меньше 100. Какова вероятность того, что сумма этих квадратов окажется больше 64?
4. Дано линейное уравнение *а*х=b. Если а выбирается наудачу на интервале (0; 8) и b – на интервале (0; 10), то ка­кова вероятность того, что корень данного уравнения будет боль­ше единицы?
5. В равносторонний треугольник, сторона которого рав­на а, вписан круг. Внутри треугольника независимо друг от друга наудачу выбираются 5 точек. Какова вероятность того, что 3 из этих точек окажутся внутри круга?

**Задание 4. *Решить задачу*:**

1. В круге радиуса R наудачу проведена хорда параллель­но заданному направлению. Найдите интегральную функцию слу­чайной величины X, выражающей длину хорды.
2. Плотность вероятности случайной величины X, подчи­ненной нормальному закону распределения, задана функцией . Найдите коэффициент А и определите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (2; 5).
3. Имеется случайная величина Х, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью р=0,9972 попадет случайная величина.
4. Случайная величина Х распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m=40 и дисперсией D=200. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (30; 80).
5. Случайная величина X имеет плотность вероятности . Найдите вероятность того, что при двух независимых испытаниях случайная величина X хотя бы один раз примет значение вне ин­тервала (4; 6).

**Задание 5. *Решить задачу*:**

1. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием *а* = 50. Определите дисперсию случайной величины X, если известно, что вероятность принятия случайной величиной значения в интервале (50; 60) равна 0,3413.
2. Масса вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением σ=0,9 т. Найти вероятность того, что очередной вагон имеет массу не более 70 т, но не менее 60 т.
3. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количество сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, - равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.
4. Вероятность наступлевия события  в данном нспытанни равна 0,5. Найтн вероятность того, что событие **наступнт от 500 раз до 530 раэ в 1000 испытаниях.
5. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле для данного стрелка равна 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины Х –числа выстрелов по цели до первого попадания.

**Практическое занятие 13.**

**Тема**: **Неравенство Чебышева. Закон больших чисел**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Теорема 1**. Если случайная величина *X*имеет математическое ожидание и дисперсию *DX*, то для любого  справедливо неравенство Чебышева

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

**Теорема 2 (Неравенство Маркова)**. Для любой неотрицательной случайной величины *Х*, имеющей математическое ожидание *MX* и , справедливо неравенство:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

**Теорема 3 (Закон больших чисел в форме П.Л. Чебышева)**. Если случайные величины независимы и существует такое число *С>*0, что ,  то для любого 

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

т.е. среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

.

**Теорема 4 (Закон больших чисел в форме Я. Бернулли)**. Если вероятность появления события *А*в одном испытании равна *р*, число наступления этого события при *n*независимых испытаниях равно , то для любого числа  имеет место равенство

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

т.е относительная частота  события *А* сходится по вероятности к вероятности *р* события *А*: .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Задача 1*.** При стрельбе по мишени, представляющей со­бой круг радиуса 30 см, средняя величина отклонения от центра мишени равна 6 см. Пользуясь леммой Чебышева, оценим вероят­ность поражения мишени при одном выстреле.

*Решение*:

Мишень будет поражена, если произойдет собы­тие (X< 30). Средняя величина отклонения от центра мишени равна М(X). Тогда по формуле  получим следующую оценку: .

***Задача 2*.** Изготовлена партия деталей. Среднее значе­ние длины детали равно 50 см, а среднее квадратичное отклоне­ние равно 0,2 см. Оценим снизу вероятность того, что длина наудачу взятой детали окажется не менее 49,5 см и не более 50,5 см.

*Решение*:

Случайная величина X – длина детали – имеет конечную дисперсию D(X) = σ2(X) = 0,04 и математическое ожидание М(X) = 50. Следовательно, для оценки снизу ве­роятности рассматриваемого события 49,5 ≤X≤ 50,5 применим неравенство Чебышева.

Из неравенства 49,5 ≤X≤ 50,5 сле­дует – 0,5 ≤X–50 ≤ 0,5, значит |Х – 50|< 0,5.

Тогда 

***Задача 3*.** Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины Х от своего математического ожидания будет меньше трех средне квадратических отклонений, т.е. меньше 3σ(Х).

*Решение*:

Полагая ε=3σ(Х) в формуле (61), получаем

.

Эта оценка называется *правилом трех сигм*.

***Задача 4*.** Дисперсия каждой из 1000 независимых слу­чайных величин равна 4. Оценим вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней ариф­метической их математических ожиданий по абсолютной величине не превысит 0,2.

*Решение*:

К последовательности рассматриваемых слу­чайных величин можно применить теорему Чебышева, так как: 1) величины независимы, 2) дисперсии ограничены: *D(Xi) = 4 (i = 1,2, ..., 1000)*, 3) математические ожидания существуют. Искомую оценку получим, используя неравенство

,

где *n*=1000, *C*=*D*(*X*)=4, *ε*= 0,2.

***Задача 5*.** Математическое ожидание числа очков, вы­павших при подбрасывании игрального кубика, равно 3,5, а дисперсия равна . Игральный кубик подбрасывается 350 раз. Оценим вероятность того, что среднее арифметическое числа выпавших очков отклонится от математического ожидания по абсолютной ве­личине не более чем на 0,2.

*Решение*:

Случайная величина *Xi(i = 1, 2, ..., 350)* – число очков, выпавших на верхней грани игрального кубика. Эти случайные величины: 1) независимы, 2) имеют ограниченные дисперсии, 3) имеют одно и то же математическое ожидание. Иско­мую оценку получим, используя неравенство

,

где *n = 350*, *D(X)= , ε=0,2, a=3,5*.

***Задача 6*.** Оценим вероятность того, что в результате подбрасывания игральной кости в течение 320 раз относительная частота появления на верхней грани пяти очков отклонится от вероятности этого события (по абсолютной величине) не более чем на 0,03.

*Решение*:

Рассматриваемые испытания удовлетворяют схе­ме Бернулли: 1) испытания независимы, 2) каждое испытание имеет два исхода (на верхней грани появилось 5 очков, на верхней гра­ни не появилось 5 очков), 3) вероятность появления 5 очков в каждом испытании постоянна и равна *р=*. Следовательно, для оценки события , где  – относительная частота появления 5 очков, можно применить неравенство

,

где *n*=320, *р=*, , ε=0,03:

.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

***Решите все предлагаемые задачи:***

1. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 600 м/сек. Оцените вероятность того, что могут наблюдаться значения начальной скорости, превышающие 900 м/сек.
2. Средняя температура в квартире, подключенной к тепло­централи, в период отопительного сезона составляет 20°С, а сред­нее квадратическое отклонение равно 2°С. Оцените вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсо­лютной величине не более чем на 5°С.
3. Вероятность получения с конвейера изделия высшего ка­чества равна 0,6. Используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Лапласа, оцените вероятность наличия от 340 до 380 из­делий высшего качества в партии из 600 изделий. Сравните полу­ченные результаты.
4. Дисперсия каждой из независимых случайных величин *Xi* означающей продолжительность горения электрической лампочки, не превышает 20 час. Сколько надо взять для испытания лампочек, чтобы вероятность того, что абсолютное отклонение средней про­должительности горения лампочки от средней арифметической их математических ожиданий не превышает одного часа, была не меньше 0,95?
5. Оцените вероятность того, что при 200 бросаниях монеты относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба при одном испытании по абсолютной величине не более чем на 0,1.

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте теорему для неравенства Чебышева и запишите неравенство Чебышева.
2. Запишите неравенство Чебышева для случайной величины, имеющей биномиальное распределение.
3. Сформулируйте теорему и запишите неравенство Маркова.
4. Сформулируйте теорему закона больших чисел в форме Чебышева.
5. Сформулируйте следствие из теоремы Чебышева.
6. Сформулируйте теорему закона больших чисел в форме Бернулли.
7. Запишите математическую интерпретацию теоремы Пуассона.
8. Сформулируйте центральную предельную теорему.
9. Запишите интегральную формулу Мувра-Лапласа.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

***Решите все предлагаемые задачи:***

1. Если среднее значение начальной скорости снаряда равно 600 м/сек, то какие значения скорости можно ожидать с вероятно­стью, не меньшей 0,4?
2. Игральный кубик подбрасывается 180 раз. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что 5 очков по­явится, от 24 до 36 раз. Оцените вероятность этого же события с помощью интегральной теоремы Лапласа.
3. Оцените с помощью Неравенства Чебышева вероятность того, что а) при бросании монеты 500 раз число выпадений герба будет заключено между 200 и 300; б) при бросании 10 игральных костей сумма очков отклониться от математического ожидания меньше, чем на 8.
4. Каждая из 2000 независимых случайных величин *Xi(i =* 1, 2, …,2000*)* имеет дисперсию, равную 4,5. Математические ожидания этих случайных величин одинаковы. Оцените вероятность того, что среднее арифметическое случайных величин отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 0,15.
5. Оценить вероятность того, что при бросании монеты 500 раз частость появления герба отклониться от вероятности появления герба при одном бросании по модулю менее чем на 0,1.

**Практическое занятие 14.**

**Тема**: **Определение числовых характеристик статистического распределения**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

*Выборочным средним*называется среднее арифметическое всех значений выборки:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Выборочное среднее можно записать и так:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

где - частость. Для обозначения выборочного среднего используют следующие символы: , , .

*Выборочной дисперсией*называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

или, что то же самое,

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

*Выборочное среднее квадратическое* отклонение выборки определяется формулой

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Особенность выборочного среднего квадратического () состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

*Исправленная выборочная дисперсия:*

|  |  |
| --- | --- |
| , или |  |

Величина

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением.*

*Размахом вариации*называется число , где ,  или , где  - наибольший,  - наименьший вариант ряда.

*Модой*вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

*Медианой*вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на середину ряда.

Если  (т.е. ряд имеет четное число членов), то

, если , то .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** В результате тестирования группа абитуриентов набрала баллы: 5, 3, 0, 1, 4, 2, 5, 4, 1, 5. Записать полученную выборку в виде: а) вариационного ряда; б) статистического ряда.

*Решение*:

а) Проранжировав статистические данные (т.е. исходный ряд), получим вариационный ряд :

(0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5).

б) Подсчитав частоту и частость вариантов , , , , , , получим статистическое распределение выборки (так называемый дискретный статистический ряд)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 |



или

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |  |  |  |  |  |  |



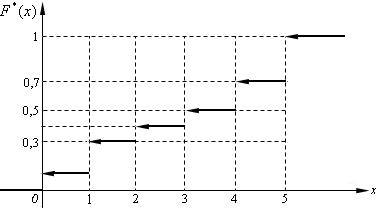
**Задача 2.** Построить функцию используя условия и результаты задачи 1.

*Решение*:

Здесь . Имеем  при (наблюдений меньше 0 нет). При  при  (здесь ) и т.д. Окончательно получаем:



График эмпирической функции распределения приведен ниже:



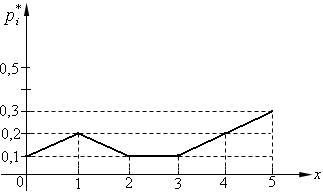
**Задача 3.** Построить полигон частостей, используя условия и результаты задачи 1.

*Решение*:

Статистический ряд распределения данной задачи имеет вид

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Отложив по оси *х* значения , а по оси у - , построим полигон частостей:



**Задача 4.** Измерили рост (с точностью до см) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерений таковы:

178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,

157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,

178, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164, 172.

Построить: а) интервальный статистический ряд; б) используя результаты построить гистограмму частостей.

*Решение*:

а) Для удобства проранжируем полученные данные:

153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163,

164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172,

173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.

Отметим, что *X -* рост студента - непрерывная случайная величина. При более точном измерении роста значения случайной величины *X*обычно не повторяются (вероятность наличия на Земле двух человек, рост которых равен, скажем  метров, равна нулю!).

Как видим, , . По формуле Стерджеса, при , находим длину частичного интервала



Примем . Тогда .

Исходные данные разбиваем на 6 () интервалов:

[150, 156), [156, 162), [162, 168), [168, 174), [174, 180), [180, 186).

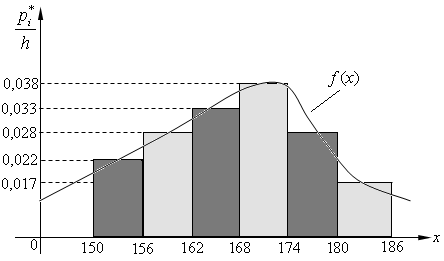
Подсчитав число студентов () попавших в каждый из полученных промежутков, получим интервальный статистический ряд:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рост | [150,156) | [156,162) | [162,168) | [168,174) | [174, 180) | [180, 186) |
| Частота | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 3 |
| Частость | 0,13 | 0,17 | 0,20 | 0,23 | 0,07 | 0,10 |

б) Длина интервала равна . Находим высоты прямоугольников:

, , , , , .

Строим гистограмму частостей:



**Задача 5.** Дано интервальное распределение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| интервал | 8-11 | 11-14 | 14-17 | 17-20 | 20-23 | 23-26 |
|  | 5 | 11 | 32 | 18 | 17 | 6 |

Найти моду и медиану.

*Решение*:

 соответствует интервал 14-17. Используем формулу

,

где  - начальное значение модального интервала,  - наибольшая частота,  и  - частота интервала предшествующего и последующего модальному.

Имеем:

, , , .

Тогда

.

Для нахождения медианы строим кумулятивный ряд. Для этого находим накопленные частоты для каждого из интервалов вариационного ряда:

,  и т.д.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| интервал | 8-11 | 11-14 | 14-17 | 17-20 | 20-23 | 23-26 |
|  | 5 | 16 | 48 | 66 | 83 | 89 |

Медиану будем искать по формуле

,

где  - объем статистической совокупности,  - накопленная частота до е-го интервала,  - частота е-го интервала,  - начальное значение медианного интервала, *е* – номер медианного интервала, который находится из условия  и .

В нашем случае , поэтому медианным интервалом является интервал

(14-17). Медиана будет равна

.

**Задача 6**. По условию задачи 1 найти характеристики выборки – результаты тестирования 10 абитуриентов.

*Решение*:

Используя формулы (8.4) - (8.12) и определения, находим:

, ,

, , ,

, , .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу.***

Для данного опыта:

1) Построить а) вариационный ряд; б) статистический ряд.

2) Найдите эмпирическую функцию распределения выборки.

3) Постройте интервальный статистический ряд.

4) Постройте полигон частот и гистограмму частостей.

5) Найдите: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) размах вариации, моду и медиану.

**1.1.** Изучается случайная величина *X*- число выпавших очков при бросании игральной кости. Кость подбросили 60 раз. Получены следующие результаты:

3, 2, 5, 6, 6, 1, 4, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 3, 1, 6, 4,

5, 4, 2, 2, 4, 2, 6, 3, 1, 5, 6, 1, 6, 6, 4, 2, 5, 4, 3, 6,

4, 1, 5, 6, 3, 2, 4, 4, 5, 2, 5, 6, 2, 3, 5, 4, 1, 2, 5, 3.

**1.3.** Дана выборка результатов измерения роста 60 студентов (юношей). Измерения проводились с точностью до 1 см.

155 170 185 180 188 152 173 178 178

168 185 173 170 183 175 173 170 183

175 180 175 193 178 183 180 197 178

181 187 168 174 179 184 183 178 180

178 163 166 178 175 182 190 167 170

178 183 170 178 181 173 168 185 175

170 155 169 186 179 189

**1.5.** Наблюдается число выигрышей в мгновенной лотерее. Получены следующие результаты:

0 1 0 0 5 0 10 0 1

0 0 1 5 1 0 0 0 1

0 1 0 0 0 0 5 0 5

0 0 1 1 1 5 10 0 1

1 1 0 5 0 0 0 0 1

0 1 0 5 0 0 0 0 1

0

**1.7.** В течение дня измерялось напряжение тока в электросети (В). Получены следующие результаты:

209 215 215 232 220 220 218 220 221

222 224 227 217 226 212 221 225 219

220 222 216 223 218 230 211 219 227

226 220 219 216 232 215 219 218 223

**1.9.** В городе А для определения сроков гарантийного обслуживания проведении исследование величины среднего пробега автомобилей, находящихся в эксплуатации в течении 2-х лет с момента продажи автомобиля магазином. Получен следующий результат (тыс.км):

3,0 25,0 18,6 12,1 10,6 18,0 17,3 29,1 20,0

18,3 21,5 26,7 12,2 14,4 7,3 9,1 2,9 5,4

40,1 16,8 11,2 9,9 25,3 4,2 29,6

**Задание 2.** Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, где **– частота попадания вариант в промежуток.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | *i* |  |  |  |  | Вариант | *i* |  |  |
| 1 | 1  2  3  4  5 | 2-4  4-6  6-8  8-10  10-12 | 5  8  16  12  9 |  |  | 2 | 1  2  3  4  5 | 10-12  12-14  14-16  16-18  18-20 | 4  12  8  8  18 |
| 3 | 1  2  3  4  5 | 3-7  7-11  11-15  15-19  19-23 | 4  6  9  10  11 |  |  | 4 | 1  2  3  4  5 | 3-7  7-11  11-15  15-19  19-23 | 6  8  10  12  4 |
| Вариант | *i* |  |  |  |  | Вариант | *i* |  |  |
| 5 | 1  2  3  4  5 | -6 + -2  -2-2  2-6  6-10  10-14 | 2  8  14  6  10 |  |  | 6 | 1  2  3  4  5 | 5-7  7-9  9-11  11-13  13-15 | 4  14  12  8  2 |

**Задание 3**. Найти несмещенную выборочную дисперсию на основании данного распределения выборки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Распределение | | | | |  | | | Вариант | Распределение | | | | |
| 1 |  | -6 | -2 | 3 | 6 |  |  |  | 2 |  | -3 | 1 | 4 | 8 |
|  | 12 | 14 | 16 | 8 |  |  |  |  | 2 | 3 | 1 | 4 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 |  | -10 | -5 | -1 | 4 |  |  |  | 4 |  | 16 | 20 | 22 | 30 |
|  | 25 | 44 | 16 | 15 |  |  |  |  | 14 | 26 | 17 | 3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 |  | 4 | 8 | 16 | 24 |  |  |  | 6 |  | 38 | 42 | 46 |  |
|  | 31 | 14 | 28 | 27 |  |  |  |  | 52 | 36 | 12 |  |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Что называют выборочным средним?
2. Что называют выборочной дисперсией?
3. Запишите формулу для выборочного среднего квадратического отклонения.
4. Что называют исправленной выборочной дисперсией?
5. Что называют исправленным выборочным средним квадратическим отклонением? Запишите формулу.
6. Дайте определение размаха вариации.
7. Что называют модой вариационного ряда?
8. Что называют медианой вариационного ряда?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу.***

Для данного опыта:

1) Построить а) вариационный ряд; б) статистический ряд.

2) Найдите эмпирическую функцию распределения выборки.

3) Постройте интервальный статистический ряд.

4) Постройте полигон частот и гистограмму частостей.

5) Найдите: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) размах вариации, моду и медиану.

**1.2.** В супермаркете проводились наблюдения над числом Х покупателей, обратившихся в кассу в течение 30 часов и были получены следующие результаты:

70 75 100 120 75 60

100 120 70 60 65 100

65 100 70 75 60 100

100 120 70 75 70 120

65 70 75 70 100 100

**1.4.** Дана выборка результатов измерения роста 50 студентов (юношей). Измерения проводились с точностью до 1 см.

155 174 179 179 169 186 174 171 184

175 193 178 184 180 196 175 181 188

168 179 178 183 184 178 181 177 163

166 178 175 183 190 167 170 178 183

170 178 182 173 168 186 176 171 188

163 180 196 175 183

**1.6.** В магазине за день проданы рубашки следующих размеров

40 37 39 42 40 39 38 40

41 36 41 41 40 39 41 40

37 43 40 39 39 38 40 37

40 38 42 41 40 42 41 40

38 39 41 40 41 41

**1.8.** В ходе проведения эксперимента получен следующий набор данных:

32 26 16 44 28 40 30 31 17

30 37 32 42 31 36 49 35 21

25 40 27 25 33 34 27 43 19

23 36 48 31 35 43 32 26 35

33 45 19 22 28 49 23 32 33

27 43 35 23 44

**1.10.** На фирме работает 39 человек. Проведено исследование числа рабочих дней, пропущенных каждым работником фирмы в течение месяца. Результаты этих исследований таковы:

0 1 3 0 2 3 5 7

3 5 2 10 7 5 0 2

5 10 5 3 1 9 15 10

1 0 2 3 5 7 7 6

5 3 0 7 10 13 0 1

**Задание 2.** Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, где **– частота попадания вариант в промежуток.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | *i* |  |  |  |  | Вариант | *i* |  |  |
| 1 | 1  2  3  4  5 | 4-8  8-12  12-16  16-20  20-24 | 5  7  10  12  6 |  |  | 2 |  | 11-14  14-17  17-20  20-23  3-26 | 3  8  14  15  10 |
| 3 | 1  2  3  4  5 | 7-9  9-11  11-13  13-15  15-17 | 5  4  8  12  11 |  |  | 4 | 1  2  3  4  5 | 2-5  5-8  8-11  11-14  14-17 | 6  24  13  1  6 |

**Задание 3**. Найти несмещенную выборочную дисперсию на основании данного распределения выборки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Распределение | | | | |  | | | | Вариант | | Распределение | | | | | |
| 1 |  | 430 | 450 | 500 |  |  |  |  | 2 | |  | | 15 | 26 | 31 |  |
|  | 20 | 18 | 12 |  |  |  |  |  | | 426 | 318 | 256 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 |  | 0,01 | 0,04 | 0,14 |  |  |  |  | 4 |  | 4 | 8 | 10 | 14 |
|  | 19 | 28 | 31 | 22 |  |  |  |  | 12 | 24 | 38 | 26 |

**Практическое занятие 15.**

**Тема**: **Точечные и интервальные оценки параметров распределения**

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Точечные оценки математического ожидания и дисперсии***

**Теорема 1.**Пусть  - выборка из генеральной совокупности и , , . Тогда выборочное среднее  - несмещенная и состоятельная оценка математического ожидания *MX*.

**Теорема 2.**Пусть  - выборка из генеральной совокупности и , . Тогда исправленная выборочная дисперсия - несмещенная состоятельная оценка дисперсии *DX*.

**Теорема 3.**Относительная частота появления события*А*в *n*независимых испытаниях является несмещенной состоятельной и эффективной оценкой неизвестной вероятности  этого события (*р* - вероятность наступления события А в каждом испытании).

**Теорема 4**. Эмпирическая функция распределения выборки  является несмещенной состоятельной оценкой функции распределения случайной величины *X*.

***Понятие интервального оценивания параметров***

Оценка неизвестного параметра называется **интервальной**, если она определяется двумя числами - концами интервала.

Интервал , накрывающий с вероятностью  истинное значение параметра , называется **доверительным интервалом**, а вероятность  - **надежностью оценки**или **доверительной вероятностью**.

Очень часто доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещенной точечной оценки , т.е. выбирается интервал вида  такой, что



Число  характеризует точность оценки: чем меньше разность , тем точнее оценка.

Величина  выбирается заранее, ее выбор зависит от конкретно решаемой задачи.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1** Монету подбрасывают *n*раз. Вероятность выпадения герба при каждом подбрасывания равна. В ходе опыта монета выпала гербом  раз. Показать несмещенность оценки  вероятности выпадения герба в каждом опыте.

*Решение*:

Число успехов () имеет распределение Бернулли. Тогда 

, .

Следовательно,

**,**

т.е**.** оценка  - несмещенная.

**Задача 2.** Найти оценки параметров нормального распределения случайной величины *X*методом моментов.

*Решение*:

Требуется по выборке найти точечные оценки неизвестных параметров и .

По методу моментов приравниваем их, соответственно, к выборочному среднему и выборочной дисперсии (- начальный момент I порядка, - центральный момент II порядка). Получаем

 т.е. 

Итак, искомые оценки параметров нормального распределения:

 и .

**Задача 3.** Найти оценку параметра *а* распределения Пуассона методом максимального правдоподобия.

*Решение*:

В данном случае . Поэтому



При , составляем функцию правдоподобия (для дискретной случайной величины *Х*)



Тогда



и

.

Уравнение правдоподобия имеет вид:

.

Отсюда находим

.

А так как

,

то оценка  является оценкой максимального правдоподобия. Итак .

**Задача 4.** Найти оценку параметра *а* распределения Пуассона методом наименьших квадратов.

*Решение*:

Найдем точку минимума функции 

.

Из уравнения  находим критическую точку:

,

т.е.

 ,

т.е

, .

А так как



при любом значении , то  - точка минимума функции .

Таким образом, оценкой параметра *а* в распределении Пуассона ,  согласно метода наименьших квадратов является

.

Можно доказать, что

, .

**Задача 5** Произведено 5 независимых наблюдений над случайной величиной . Результаты наблюдений таковы: , , , , . Найти оценку для **, а также построить для него 95%-й доверительный интервал.

*Решение*:

Находим сначала :

, т.е. .

Учитывая, что  и , получаем .

По таблице выясняем, что .

Тогда .

Согласно , доверительный интервал для **таков:

, т.е. (*-*13,5; 21,5).

**Задача 6.** По условию задачи 5, считая, что случайная величина , построить для неизвестного доверительный интервал. Считать .

*Решение*:

Оценку для *MX*уже знаем: . Находим значение *S*:

,

.

По таблице для  и  находим .

Следовательно, .

Доверительный интервал таков (*-*27,9; 35,9).

**Задача 7.** Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 30 единиц и вычислено. Найти доверительный интервал, покрывающий *а* с вероятностью .

*Решение*:

Имеем , . По таблице находим





Доверительный интервал имеет вид

 или .

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу***

* 1. Найти оценку параметра распределения Пуассона методом моментов.
  2. Найти оценку неизвестной вероятности успеха в схеме Бернулли методом моментов и методом максимального правдоподобия.
  3. Найти оценки параметров нормального распределения случайной величины *X*методом максимального правдоподобия.
  4. Измерили рост (с точностью до см) 30 наудачу отобранных студентов. Результаты измерений таковы:

178, 160, 154, 183, 155, 153, 167, 186, 163, 155,

157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169,

178, 165, 156, 179, 158, 171, 175, 173, 164

Найти точечную оценку и доверительный интервал для среднего роста студентов, считать .

* 1. На предприятии изготавливается определенный вид продукции. Ежемесячный объем выпуска этой продукции является случайной величиной, для характеристики которой принят показательный закон распределения . В течении 6 месяцев проводился замер объемов выпуска продукции, получены следующие данные:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Объем выпуска | 20 | 24 | 25 | 28 | 27 | 32 |

Найти оценку параметра .

**Задание 2. *Решить задачу.***

**2.1.** Случайная величина Х задана функцией распределения  Произведена выборка

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 |
|  | 3 | 3 | 5 | 10 | 10 |

Найти оценку параметра .

* 1. При условии равномерного распределения случайной величины Х произведена выборка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
|  | 21 | 16 | 15 | 26 | 22 | 14 | 21 | 22 | 18 | 25 |

Найти оценку параметров *a* и *b*.

* 1. Случайная величина *Х* распределена по биномиальному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 2 | 3 | 10 | 22 | 26 | 20 | 12 | 5 |

Найти точечную оценку параметра *р* указанного закона распределения случайной величины .

* 1. Стеклянные однородные изделия отправлены для реализации из Москвы в Новосибирск в 1000 контейнерах. После поступления товара было выявлено количество разбитых изделий в каждом контейнере. Результаты представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 785 | 163 | 32 | 16 | 4 |

Считая, что число разбитых изделий описывается законом Пуассона, найти точечную оценку параметра .

* 1. Найти доверительный интервал с надежностью 0,8 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины, если известны ее среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя , объем выборки .

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Сформулируйте определение статистической оценки параметра. Дайте определение точечной оценки.
2. В чем состоит метод моментов?
3. В чем состоит метод максимального правдоподобия?
4. Запишите формулу оценки максимального правдоподобия.
5. В чем состоит метод наименьших квадратов.
6. Дайте определение интервальной оценки неизвестного параметра.
7. Что называют доверительным интервалом?
8. Запишите доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии.
9. Запишите доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии.
10. Запишите доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу***

* 1. Пользуясь методом максимального правдоподобия, оценить вероятность появления герба, если при 10 бросаниях монеты герб появился 6 раз.
  2. Дано: сучайная величина*.* По выборке оценить величины *а и b*методом моментов.
  3. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально с  м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину моря с ошибкой не более 5 м при надежности ?
  4. Производятся независимые испытания с одинаковой, но с неизвестной вероятностью **появления события *А* в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки **с надежностью 0,95, если в 400 испытаниях события *А* появилось 80 раз.
  5. При условии показательного распределения случайной величины *Х*  произведена выборка

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 3 | 10 | 12 | 15 |
|  | 3 | 3 | 6 | 4 | 4 |

Найти оценку параметра .

**Задание 2. *Решить задачу.***

* 1. При условии равномерного распределения случайной величины *Х* произведена выборка

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 4 | 6 | 5 | 12 | 8 |

Найти оценку параметров *a* и *b*.

* 1. Случайная величина подчиняется нормальному закону распределения . Известно, что . Произведена выборка

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
|  | 6 | 9 | 16 | 25 | 20 | 16 | 8 |

Найти оценку параметра *а* и несмещенную оценку параметра .

* 1. Случайная величина Х распределена по закону Пуассона с неизвестным параметром . Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 199 | 169 | 87 | 31 | 9 | 3 | 1 | 1 |

Найти точечную оценку параметра .

* 1. Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины, если известны ее среднее квадратическое отклонение , выборочная средняя , объем выборки .
  2. Случайная величина Х распределена по показательному закону. Статистическое распределение выборки представлено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
|  | 365 | 245 | 150 | 100 | 70 | 45 | 25 |

Найти точечную оценку параметра .

**Практическое занятие 16.**

**Тема: Статистическая обработка результатовнаблюдений**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Под **статистической гипотезой**(или просто *гипотезой*) понимают всякое высказывание (предположение) о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Одну из гипотез выделяют в качестве **основной**(или *нулевой*) и обозначают *Н*0, а другую, являющуюся логическим отрицанием *H*0, т.е. противоположную *Н*0 - в качестве **конкурирующей**(или *альтернативной*) гипотезы и обозначают *Н*1.

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу *Н*0(соответственно, отклонить или принять *Н*1), называется **статистическим критерием**(или просто *критерием*) проверки гипотезы *Н*0.

**Ошибка первого рода**состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза *Н*0, когда на самом деле она верна.

**Ошибка второго рода**состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза *Н*1, когда она на самом деле верна.

Вероятность ошибки 1-го рода (обозначается через ) называется **уровнем значимости критерия.**

Величина  - вероятность недопущения ошибки 2-го рода (т.е. отвергнуть неверную гипотезу *Н*0, принять верную *Н*1), называется **мощностью критерия**.

**Критерий Пирсона:**

.

Согласно теореме Пирсона, при  статистика имеет ****- распределение с степенями свободы, где *m* - число групп (интервалов) выборки, *r* - число параметров предполагаемого распределения.

**Критерий Колмогорова.** Сущность критерия Колмогорова состоит в том, что вводят в рассмотрение функцию

,

называемой **статистикой Колмогорова**, представляющей собой максимальное отклонение эмпирической функции распределения  от гипотетической (т.е. соответствующей теоретической) функции распределения .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Измерены 100 обработанных деталей. Отклонения от заданного размера приведены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | [-3, -2) | [-2, -1) | [-1,0) | [0,1) | [1,2) | [2,3) | [2,3) | [4,5) |
|  | 1 | 3 | 10 | 15 | 24 | 25 | 13 | 3 |

Проверить при уровне значимости  гипотезу отом, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

*Решение*:

Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения ():

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | [-3, -1) | [-1, -0) | [0,1) | [1,2) | [2,3) | [3,5) |
|  | 13 | 15 | 24 | 25 | 13 | 10 |

Случайную величину - отклонение - обозначим через *X.* Для вычисления вероятностей  необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения . Их оценки вычислим по выборке:

,

,

.

Находим . Так как случайная величина определена на , то крайние интервалы в ряде распределения заменяем, соответственно, на  и  Тогда



.

Аналогично получаем:

, , , , 

.

Полученные результаты приведем в следующей таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (-∞,-1) | [-1,0) | [0,1) | [1,2) | [2,3) | [3,∞) |
|  | 13 | 15 | 24 | 25 | 13 | 10 |
|  | 13,14 | 16,67 | 22,58 | 21,83 | 15,03 | 10,75 |

Вычисляем:

.

Находим число степеней свободы. По выборке рассчитаны два параметра, значит, *.*

Количество интервалов 6, т.е*. *. Следовательно, .

Зная, что  и , по таблице -распределения находим .

Итак, ,следовательно, нет оснований отвергнуть проверяемую гипотезу.

**Задача 2.** Монету бросали 4040 раз (Бюффон). Получили  выпадений герба и  выпадений решки. Проверить, используя а) критерий Колмогорова; б) критерий Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой о симметричности монеты .

*Решение*:

Случайная величина *X*принимает два значения: (решка) и *х2 =* 1 (герб).

Гипотеза .

а) По таблице распределения Колмогорова находим корень уравнения при . Следует . Тогда

.

Для нахождения по выборке строим функции и  ивычисляем величину

.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Решка | Герб |  |
|  | 0,5 | 0,5 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Решка | Герб |  |
|  | 1992 | 2048 |
|  |  |  |

Максимальное отклонение отравно 0,007, т.е. .

Поскольку *,* то нет оснований отвергать гипотезу . Опытные данные согласуются с гипотезойо симметричности монеты.

б) Вычисляем статистику 

.

По таблице -распределения находим критическую точку  .

Так как , то опытные данные согласуются с гипотезой о симметричности монеты.

**Задача 3.** Фирма - поставщик в рекламном буклете утверждает, что средний срок безотказной работы предлагаемого изделия – 2900 ч. Для выборки из 50 изделий средний срок безотказной работы оказался равным 2720 ч при выборочном среднем квадратичном отклонении 700 ч. При 5% уровне значимости проверить гипотезу о том, что значение 2900 ч является математическим ожиданием.

*Решение*:

Предположим, что случайная величина срока безотказной работы подчинена нормальному закону распределения. Требуется проверить гипотезу о числовом значении математического ожидания нормальной распределенной величины при неизвестной генеральной дисперсии. В этом случае в качестве критерия выбирают функцию:



где - выборочная средняя,  - математическое ожидание, - выборочное среднее квадратическое отклонение.

Случайная величина *Т* имеет *t-*распределение с  степенями свободы. В данной задаче речь идет о сравнении выборочной средней 2720 ч с гипотетическим математическим ожиданием  ч, при этом выборочное среднее квадратичное отклонение равно 700 ч.

Требуется найти критическую область для нулевой гипотезы  при альтернативной гипотезе . Критическая область левосторонняя.

 находим из условия .

При  и  в таблице *t-*распределения, используя линейную интерполяцию, находим . Таким образом, критическая область . Рассчитаем , полагая, что .

.

Значение −1,8 попадает в критическую область, поэтому нулевая гипотеза должна быть отвергнута. Следовательно, фирма в рекламе завышает срок безотказной работы изделия.

**Задача 4.** Фирма – изготовитель женских украшений, выпустив новый товар, утверждает, что 40% покупателей купят эти украшения. В ходе 10*-*дневной рекламной распродажи в среднем приобрели украшения 29,5% покупателей, выборочное среднее квадратическое отклонение составило 16,5%. При 5% уровне значимости оценить утверждение изготовителя товара.

*Решение*:

Проверим нулевую гипотезу и альтернативную . Предположим, что случайная величина *Х*− число покупателей − имеет нормальный закон распределения. Требуется проверить гипотезу о числовом значении математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии. Критерий имеет вид:



Для заданного уровня значимости  найдем левостороннюю критическую область с учетом того, что  степеней свободы. Критическая область есть интервал . Рассчитаем .



Число −1,909 попадает в критическую область, поэтому нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

**Задача 5.** Срок хранения продукции, изготовленный по технологии *А*, составил:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Срок хранения |  | 5 | 6 | 7 |
| Число единиц продукции |  | 2 | 4 | 4 |

а изготовленный по технологии *В:*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Срок хранения |  | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Число единиц продукции |  | 1 | 8 | 7 | 1 |

Предположив, что случайные величины *Х* и *Y* распределены по нормальному закону, проверить гипотезу  при уровне значимости 0,1 и альтернативной гипотезе .

*Решение*:

Вычислим исправленные выборочные дисперсии . Для этого вначале найдем :

,

.

Тогда





Учитывая, что  определим 

**.**

Критическое значение находим из условия

.

По таблице *F*-распределений определяем . Так как число попадает в критическую область(2,54; ∞), то гипотезу о равенстве дисперсий среднего срока хранения продукции, изготовленной по технологии *А* и *В*, отвергаем.

**Задача 6.** Средний ежедневный объем продаж за 1 квартал текущего года для 17 торговцев района составляет 15 тыс.руб. при исправленном среднем квадратическом отклонении 2,5 тыс.руб., а для 10 торговцев района − 13 тыс.руб. при исправленном среднем квадратическом отклонении 3 тыс.руб. Каждую группу можно считать случайной независимой выборкой из большой совокупности. Существенно ли различие объемов продаж в районах *А* и *В*при 5% уровне значимости .

*Решение*:

Предположим, что ежедневный объем продаж подчинен нормальному закону распределения. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение законов распределения для районов *А* и *В* неизвестны. Предположим, что дисперсии объемов продаж одинаковы. В этих условиях возникает задача оценки статистической гипотезы . При альтернативной . Если принять за  математическое ожидание объема продаж для района *А*, за  - для района *В*.

Выборочные средние  и  являются независимыми нормально распределенными случайными величинами. В качестве критерия используем функцию

,

где .

Функция *Т* подчинена *t*−распределению для  степеней свободы. По таблице *t*−распределения для  и 5%-го уровня значимости находим . Это значит, что критическая область есть интервал  и .

Рассчитаем 

,

.

Полученное значение критерия  не принадлежит критической области, следовательно, разность несущественна и гипотеза принимается. В качестве общей средней выборочной принимают величину

.

**Задача 7.** Коммерсант предполагает, что объем продаж нового вида продукции в каждой из 5 торговых точек, расположенных в различных районах, будет одинаков. Фактический объем продаж оказался разным:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Район | *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Фактический объем продаж |  | 105 | 117 | 84 | 111 | 83 |

Оценить, значимы или нет различия между наблюдаемыми и ожидаемыми объемами продаж при уровне значимости 0,01 и 0,05.

*Решение*:

Так как в задаче спрашивается о согласовании ожидаемых и фактических объемов продаж, то теоретический закон распределения определен: во всех районах объем продаж одинаков, т.е.



Заметим, что в данном примере нельзя использовать в качестве закона распределения биноминальный или нормальный закон, так как речь идет об одновременном сравнении пяти районов.

Составим таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Район | *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Фактический объем продаж |  | 105 | 117 | 84 | 111 | 83 |
| Ожидаемый объем продаж |  | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |

Тогда .

Выбирая уровень значимости  по таблице - распределения для числа степеней свободы  находим , а для уровня значимости , .

Следовательно, для уровня значимости  критическая область представляет собой интервал  не попадает в критическую область, т.е. нулевая гипотеза, состоящая в том, что ожидаемые и фактические объемы продаж согласуются, не отвергается. Для уровня значимости  критическая область представляет собой интервал . Так как  попадает в критическую область, т.е. нулевая гипотеза должна быть отклонена.

2. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

**Задание 1. *Решить задачу.***

* 1. Распределение признака *X*(случайной величины *X)* в выборке задано следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0-0,1 | 0,1-0,2 | 0,2-0,3 | 0,3-0,4 | 0,4-0,5 |
|  | 0,5 | 95 | 100 | 100 | 102 |
|  | 0,5-0,6 | 0,6-0,7 | 0,7-0,8 | 0,8-0,9 | 0,9-1,0 |
|  | 98 | 104 | 96 | 105 | 95 |

При уровне значимости  проверить гипотезу ,состоящую в том, что случайная величина *Х*имеет равномерное распределение на отрезке [0,1] (вероятности *pi*определяются формулами: , где - длина *i*- отрезка 

**1.2.** По данным задачи 1.2 проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины *X*,используя критерий Колмогорова.

**1.3.** Средний диаметр подшипников должен составлять 35 мм. Однако для выборки из 82 подшипников он составил 35,3 мм при выборочном среднем квадратическом отклонении 0,1 мм. При 5% уровне значимости проверить гипотезу о том, что станок на котором изготавливают подшипники, не требует подналадки.

**1.4.** Среднесуточная продажа хлеба в течении многих лет для данного магазина составляла 6 тонн при среднем квадратическом отклонении 0,05 т. Сегодня магазином было продано 7 т хлеба. Можно ли при 5%-м уровне значимости предполагать, что и завтра будет продано 7 т. хлеба.

**1.5.** Поставщик двигателей утверждает, что средний срок их службы равен 800 ч. Для выборки из 17 двигателей средний срок службы оказался равным 865 ч. при выборочном среднем квадратическом отклонении 120 ч. Проверить нулевую гипотезу при уровне значимости: а) 5%, б) 1%.

**Задание 2. *Решить задачу.***

Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение  является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при 5% уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки  получено выборочное среднее , а выборочное среднее квадратическое отклонение равно .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |  |  |  | Вариант |  |  |  |
| 1 | 10 | 12 | 1 |  |  |  |  | 2 | 100 | 96 | 6 |
| 3 | 20 | 22 | 4 |  |  |  |  | 4 | 80 | 78 | 4 |
| 5 | 20 | 18 | 2 |  |  |  |  | 6 | 80 | 84 | 3 |

**Задание 3. *Решить задачу.***

При уровне значимости  проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин  и на основе выборочных данных при альтернативной гипотезе 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | X | | Y | |  | Вариант | X | | Y | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 142  145  146  148 | 3  1  2  4 | 140  146  147  151 | 5  3  2  2 |  | 2 | 42  45  46  50 | 15  17  12  16 | 84  87  92  96 | 3  2  4  1 |
| 3 | 37  38  40  41  42 | 2  1  4  3  6 | 38  39  40  41  43 | 4  3  2  2  3 |  | 4 | 30  32  33  34  36 | 4  5  8  1  2 | 30  31  32  34  35 | 6  4  3  5  2 |
| 5 | 39  43  45  47  51 | 4  2  3  4  2 | 75  80  84  91  94 | 4  2  3  4  2 |  | 6 | 42  44  48  50  53 | 4  8  3  5  10 | 44  45  46  51  55 | 16  12  11  6  5 |

ВОПРОСЫ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

1. Что называют проверкой гипотез? Сформулируйте задачи статистической проверки гипотез.
2. Можно ли статистическими методами доказать гипотезу?
3. Что называют статистической гипотезой? Перечислите виды гипотез.
4. Какую гипотезу называют нулевой?
5. Какую гипотезу называют конкурирующей?
6. Какую гипотезу называют простой? сложной?
7. Что называют статистическим критерием?
8. Что называют статистикой критерия?
9. Что называют критической областью?
10. Что называют областью принятия гипотезы?
11. В чем состоит основной принцип проверки гипотез?
12. В чем суть ошибки первого рода?
13. В чем состоит ошибка второго рода?
14. Что называют уровнем значимости критерия?
15. Что называют мощностью критерия?
16. Дайте определение критерия согласия.
17. Чему равен критерий Пирсона? Запишите формулу.
18. Сформулируйте правило применения критерия Пирсона.
19. В чем сущность критерия Колмогорова?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задание 1. *Решить задачу.***

**1.1.** Результаты наблюдений над случайной величиной *X*(рост мужчины) представлены в виде статистического ряда:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х (рост) | [150 - 155) | [155 - 160) | [160 - 165) | [165 - 170) |
| (частота) | 6 | 22 | 36 | 46 |
| Х(рост) | [170-175) | [175-180) | [180-185) | [185-190) |
| (частота) | 56 | 24 | 8 | 2 |

Проверить при уровне значимости  гипотезу  о том, что с. в. *X*подчиняется нормальному закону распределения, используя критерий согласия Пирсона.

**1.2.** Составлена случайная выборка из 64 покупателей, которые интересовались товаром *А*. Из них товар *А* купили 16 человек. Поставщик утверждает, что данный товар должен привлечь треть покупателей, а среднее квадратическое отклонение равно одному человеку. Проверить нулевую гипотезу при 5% уровне значимости.

**1.3.**Поставщик удобрений утверждает, что применение новой партии удобрений обеспечивает урожайность пшеницы в 60 ц/га. Удобрения внесли на площади в 37 га и получили урожай 55 ц/га при выборочном среднем квадратическом отклонении 3 ц/га. При 5% уровне значимости оценить справедливость утверждения поставщика.

**1.4.** По результатам 10 замеров установлено, что среднее время обслуживания мастером клиента  минут. Предполагая, что время обслуживания клиента – нормально распределенная случайная величина с дисперсией мин2, при уровне значимости  установить, можно ли принять в качестве норматива для обслуживания одного клиента: а) 21 мин; б) 16 мин.

**1.5.** По паспортным данным на автомобильный двигатель, расход топлива на 100 км пробега составляет 10 л при выборочном среднем квадратическом отклонении 2 л. В результате совершенствования конструкции ожидается, что расход топлива уменьшится. Для проверки проведены испытания 25 случайно отобранных автомобилей с модернизированным двигателем: средний расход топлива на 100 км пробега составил 9,2 л. При 5% уровне значимости проверить гипотезу, утверждающую, что модернизация повлияла на расход топлива.

**Задание 2. *Решить задачу.***

Проверить нулевую гипотезу о том, что заданное значение  является математическим ожиданием нормально распределенной случайной величины при 5% уровне значимости для двусторонней критической области, если в результате обработки выборки  получено выборочное среднее , а выборочное среднее квадратическое отклонение равно .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |  |  |  | Вариант |  |  |  |
| 1 | 40 | 44 | 3 |  |  |  |  | 2 | 50 | 48 | 2 |
| 3 | 58 | 56 | 4 |  |  |  |  | 4 | 60 | 54 | 2 |

**Задание 3. *Решить задачу.***

При уровне значимости  проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин  и на основе выборочных данных при альтернативной гипотезе 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | X | | Y | |  | Вариант | X | | Y | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 3,5  3,7  3,9  4,0  4,1 | 1  3  5  4  4 | 3,6  3,7  3,8  4,4  4,2 | 3  5  2  1  4 |  | 2 | 31  35  40  42  44 | 7  3  4  2  4 | 29  32  33  35  39 | 8  9  12  10  11 |
| 3 | 9  10  11  12  14 | 4  5  3  2  1 | 9  10  11  13  14 | 5  6  4  8  3 |  | 4 | 61  62  64  67  68 | 5  4  6  2  4 | 60  63  64  68  70 | 4  3  2  6  5 |

**Список рекомендуемой литературы**

***а) основная литература:***

1. Сапожников, П.Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: Учебное пособие / Сапожников П.Н., Макаров А.А., Радионова М.В.. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2020. – 496 с. // режим доступа: <https://znanium.com/catalog/product/1027404>
2. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., – 2-е изд. – М.:НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 289 с. // режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/989380

***б) дополнительная литература:***

1. Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. – 3-е изд., стер. – М.: «Дашков и К°», 2020. – 472 с. – режим доступа: https://znanium.com/catalog/product/1093507